INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · K. KLOTTER · K. MAGNUS · E. METTLER
K. v. SANDEN · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XXVII. BAND ERSTES HEFT 1959

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Abgeschlossen am 16. März 1959

Postverlagsort Berlin *Preis DM 11,20*

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel**, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr.-Ing. Dr. **A. Betz**, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A

Professor Dr.-Ing. **K. Klotter**, Stanford (Calif.), 621 Alvarado Row.

Professor Dr. **K. Magnus**, Stuttgart O, Hackländerstraße 33

Professor Dr. **E. Mettler**, Karlsruhe-Durlach, Geigersberger Str. 12

Professor Dr.-Ing. **K. v. Sanden**, Karlsruhe-West, Hertzstr. 16, (T. H. West)

Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt**, Technische Hochschule, München, Arcisstr. 21

Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen**, Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klarverständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Mit der Annahme des Manuskriptes erwirbt der Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder.

Im „Ingenieur-Archiv" erscheinende Arbeiten dürfen vorher an anderer Stelle nicht veröffentlicht sein und auch später nicht anderweitig veröffentlicht werden.

Photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote von ganzen Heften, einzelnen Beiträgen oder Teilen daraus sind ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in dieser Zeitschrift berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg

Neuenheimer Landstraße 28—30 / Fernsprecher 2 79 01

Berlin-Wilmersdorf

Heidelberger Platz 3 / Fernsprecher Sammel-Nr. 83 03 01

Inhalt:

	Seite
Raabe, J., Beiträge zur Berechnung von Kaplanturbinen	1
Jäger, B., Die Eigenfrequenzen und Schwingungsformen von Turbomaschinen	33
Meyer zur Capellen, W., Die Beschleunigungsänderung. I. Mitteilung	53
Schubart, H., Über die Grenzamplitude einer Klasse selbsterregter Schwingungen	66

INGENIEUR-ARCHIV

XXVII. BAND ERSTES HEFT 1959

Beiträge zur Berechnung von Kaplanturbinen

Von J. Raabe

1. Einleitung. Die zunächst empirische Entwicklung der Kaplanturbine ergab infolge der nahezu gleichzeitigen Ausbildung der Theorie des gebundenen Wirbelfadens, welche von *L. Prandtl* ausging, einen der Prüfsteine für diese Methode. Durch die Arbeiten von *W. Birnbaum*[1] aus dem Jahre 1923 angeregt, gelang es erstmals *M. Schilhansl*[2] 1927, diese Singularitätenmethode auf das einfache Modell einer koaxial zylindrischen Laufradströmung anzuwenden. Die experimentellen Untersuchungen von *K. Hahn*[3] im Jahre 1933 an Kaplanlaufrädern verschiedener Flügelzahl sicherten den Anwendungsbereich dieses Modells. *P. Ruden*[4] verfeinerte 1937 die Vorstellung von der Laufradströmung im Zusammenhang mit Versuchen an Verdichterlaufrädern von verschiedener Form und Flügelzahl, die an Hand einer 1931 von *A. Betz*[5] entwickelten Methode unter zusätzlicher Berücksichtigung der Verdrängungswirkung der Flügel und unter Beachtung der freien Wirbel und der *Euler*schen Gleichungen gedeutet wurden. 1951 gelang es *M. Strscheletzky*[6], die für die Kaplanturbine typische Strömung in Leitrad und Übergangsraum in Übereinstimmung mit Versuchen zu erklären.

Die vorliegende Arbeit[7], die sich auf Versuche des Verfassers an einem nach der Singularitätenmethode entwickelten Laufrad stützt, berücksichtigt vor allem die Verträglichkeit der Strömung in den Querschnitten aufeinanderfolgender Bauteile (Leitrad, Laufrad, Saugrohr) beim Entwurf. Außerdem bringt sie methodische und grundsätzliche Ergänzungen, die sich auf die angenäherte zwei- und dreidimensionale Behandlung der Strömung sowie die Berechnung der Kennlinien einer Teilturbine beziehen.

2. Die ebene inkompressible Strömung durch das gerade Gitter. Nimmt man innerhalb des Laufrades einer Kaplanturbine rotationssymmetrische, äquidistante Stromflächen an, dann kann man bekanntlich dessen Durchströmung auf das Modell der ebenen, wirbelfreien Strömung durch ein gerades Gitter aus Profilen zurückführen. Außer der Teilung t und der Profillänge L ergeben sich aus der ebenen Gittertheorie[8] als wesentliche Parameter des Strömungsvorganges der Winkel β_{p0}, den die auftriebslose Anströmrichtung mit der Gitterachse einschließt, und der Gitterverstärkungsfaktor K, welcher definiert ist durch

$$K = \lim_{\delta_0 \to 0} \left[\left(\frac{\partial c_a}{\partial \delta_0} \right)_{Gitter} : \left(\frac{\partial c_a}{\partial \delta_0} \right)_{Einzelflügel} \right], \tag{1}$$

Dabei bezeichnet δ_0 den Nullanstellwinkel, den die um β_∞ gegen die Gitterachse (gleich Umfangsrichtung) geneigte Anströmgeschwindigkeit w_∞ mit der auftriebslosen Anströmrichtung einschließt und c_a den Auftriebsbeiwert.

Es werde im folgenden eine Strömung von geringer Reibung angenommen, wobei ein kleiner Gleitwinkel ε vorliegt und wobei die obigen Gitterkennwerte mit guter Näherung mittels bekannter Methoden[8] aus der ebenen Potentialströmung entnommen werden können. Bei den hier betrach-

[1] *W. Birnbaum*, Z. angew. Math. Mech. 3 (1923), S. 290.

[2] *M. Schilhansl*, Jahrb. wiss. Ges. für Luftfahrt, München (1927), S. 151.

[3] *K. Hahn*, Untersuchung der Strömung durch eine Flügelradturbine bei verschiedenen Schaufelzahlen. Dissertation Karlsruhe 1935.

[4] *P. Ruden*, Luftfahrtforschung 14 (1937), S. 327.

[5] *A. Betz*, Ing.-Arch. 2 (1931), S. 359.

[6] *M. Strscheletzky*, Ing.-Arch. 19 (1951), S. 309.

[7] Die Arbeit ist eine Kurzfassung der von der Fakultät für Maschinenwesen und Elektrotechnik der TH München genehmigten und am 13. 7. 1955 eingereichten Habilitationsschrift des Verfassers. Der Verfasser dankt an dieser Stelle Herrn Prof. Dr.-Ing. *K. Hahn* für seine wohlwollende, stetige Unterstützung, die einen Abschluß dieser Arbeit erst ermöglicht hat.

[8] Siehe außer den Arbeiten von *Birnbaum*, *Betz* und *Schilhansl* die folgenden Arbeiten: *E. König*, Z. angew. Math. Mech. 2 (1922), S. 422; *F. Weinig*, Strömung in Schaufeln von Turbomaschinen, Leipzig 1935; *E. Pistolesi*, L'Aerotecnica, 17 (1937) S. *J. Ackeret*, Schweizer Bauztg. 120 (1942) S. 120; *H. Schlichting*, Berechnung der reibungslosen, inkompressiblen Strömung für ein vorgegebenes Schaufelgitter, VDI Forschungsheft 447 (1955).

teten dünnen Profilen kann der Dickeneinfluß entweder vernachlässigt oder durch die in Abschnitt 3 dargestellte Näherungsmethode bestimmt werden. Mit dem oben definierten Nullanstellwinkel $\beta_\infty - \beta_{p0}$, einem die Zirkulationsminderung in wirklicher Strömung berücksichtigenden Beiwert $m < 2\pi$, welcher annähernd aus der Kennlinie des Einzelprofils in ebener Strömung entnommen werden kann, und dem Gitterverstärkungsfaktor K ergibt sich bekanntlich der Auftriebsbeiwert im Gitterverband zu

$$c_a = m\, K \sin(\beta_\infty - \beta_{p0})\,. \tag{2}$$

Für die hier betrachteten kleinen Anstellwinkel darf man[1] annehmen, daß K nur von dem Winkel der auftriebslosen Anströmrichtung gegen die Gitterachse β_{p0} und dem Teilungsverhältnis t/L abhängt:

$$K = K(\beta_{p0}, t/L)\,. \tag{3}$$

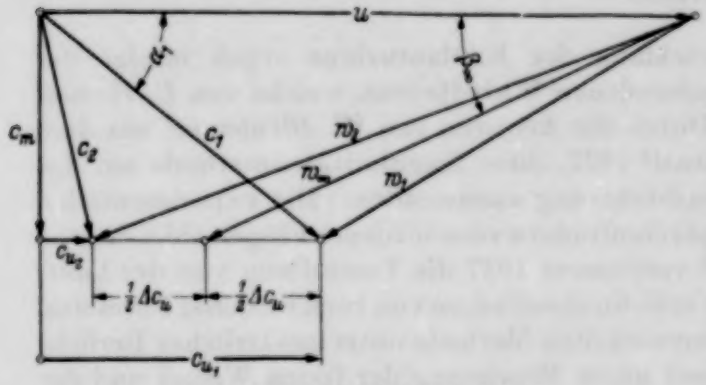

Abb. 1. Geschwindigkeitsdreiecke.

Gleichung (2) kann man in der folgenden Form schreiben:

$$c_a = m\, K(\sin\beta_\infty \cos\beta_{p0} - \cos\beta_\infty \sin\beta_{p0})\,. \tag{4}$$

Mittels der bekannten Gitterbemessungsgleichung für Turbinen[2]

$$c_a = \frac{2t}{L}\,\frac{\Delta c_u}{w_\infty(1 - \operatorname{tg}\varepsilon \operatorname{ctg}\beta_\infty)} \tag{5}$$

und den beiden aus den Geschwindigkeitsdreiecken (Abb. 1) zu entnehmenden Beziehungen

$$w_\infty \sin\beta_\infty = c_m\,, \tag{6}$$

$$w_\infty \cos\beta_\infty = u - c_m \operatorname{ctg}\alpha_1 + \frac{1}{2}\,\Delta c_u \tag{7}$$

kann man $\operatorname{ctg}\beta_\infty$ auf c_m, u, Δc_u und α_1 zurückführen. Auf diese Weise erhält man eine Gleichung zweiten Grades für die Ablenkungsgeschwindigkeit Δc_u, deren Wurzeln mit der Abkürzung

$$\varkappa = \frac{4t}{m\, L\, K \sin\beta_{p0}} \tag{8}$$

die folgende Form haben:

$$\Delta c_u = [\operatorname{ctg}\beta_{p0} + \operatorname{ctg}\varepsilon(1+\varkappa) + 2\operatorname{ctg}\alpha_1]\, c_m - 2u$$
$$\overline{(+)}\sqrt{c_m^2\{[\operatorname{ctg}\beta_{p0} + \operatorname{ctg}\varepsilon(1+\varkappa)]^2 + 4\operatorname{ctg}\varepsilon(\varkappa\operatorname{ctg}\alpha_1 - \operatorname{ctg}\beta_{p0})\} - 4\varkappa\operatorname{ctg}\varepsilon\, c_m u}\,. \tag{9}$$

Da Δc_u wesentlich positiv ist, gilt nur das obere Vorzeichen vor der Wurzel.

Formel (9) stellt die Ablenkungsgeschwindigkeit Δc_u als Funktion der Durchflußgeschwindigkeit c_m, der Umfangsgeschwindigkeit des Gitters u, der Gitterparameter β_{p0} und t/L und des Gleitwinkels ε dar. Da die bei den üblichen kleinen Gleitwinkeln sehr großen Glieder mit $\operatorname{ctg}\varepsilon$ sich nahezu aufheben, kann der Einfluß des Gleitwinkels nur bei sehr genauer numerischer Auswertung von (9) erfaßt werden. Man entwickelt daher zweckmäßig die Wurzel von (9) nach Ausklammerung der Glieder mit $\operatorname{ctg}\varepsilon$ in eine binomische Reihe, deren Summanden wieder in geometrische Reihen zu zerlegen sind. Auf diese Weise bekommt man mit den Abkürzungen

$$g = 1 + \varkappa\,, \tag{10a}$$

$$f = 4\left[\varkappa\left(\operatorname{ctg}\alpha_1 - \frac{u}{c_m}\right) - \operatorname{ctg}\beta_{p0}\right] \tag{10b}$$

die folgende Abhängigkeit der Ablenkungsgeschwindigkeit von den Potenzen von $\operatorname{tg}\varepsilon$:

$$\Delta c_u = 2\operatorname{ctg}\alpha_1 c_m - 2u + c_m \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} (-1)^{n+1}\binom{1/2}{m+1} \operatorname{tg}^n\varepsilon \operatorname{ctg}^{n-m}\beta_{p0}\, g^{m-n-1} f^{m+1}. \tag{11a}$$

Da in (11a) eine alternierende Reihe der Potenzen von $\operatorname{tg}\varepsilon$ vorliegt, ist der Fehler, den man bei Vernachlässigung des Gleitwinkeleinflusses begeht, kleiner als das im allgemeinen sehr kleine, in $\operatorname{tg}\varepsilon$ lineare Glied der Reihe. Weil man den Einfluß des Gleitwinkels auch durch geeignete Wahl des Beiwertes m (2) berücksichtigen kann, wird im folgenden der Zusammenhang (11a) stets auf

[1] *K. Pantell*, Wasserkraft u. Wasserwirtschaft 28 (1933) S. 241.
[2] *W. Bauersfeld*, Z. VDI 66 (1922) S. 461.

den eines verschwindenden Gleitwinkels ε spezialisiert. Man erhält hierfür aus (11a) die Beziehung

$$\Delta c_u = \frac{2}{\varkappa + 1} \left[(\operatorname{ctg} \alpha_1 + \operatorname{ctg} \beta_{p0})\, c_m - u \right], \tag{11b}$$

welche für den Sonderfall des geraden Streckengitters in ebener Potentialströmung als strenge Lösung bekannt ist.[1]

Mit Beachtung von (3) und (8) stellt (11) bei vorgegebenen Geschwindigkeitsdreiecken eine Beziehung zwischen der durch β_{p0} gekennzeichneten auftriebslosen Anströmrichtung des Gitters und dem Teilungsverhältnis t/L dar.

Wie später gezeigt werden wird, ist für den Zylinderschnitt des Flügels entweder t/L oder β_{p0} vorgeschrieben. Damit kann bei gegebenen Entwurfsdaten, wie dies in Abschnitt 7b angegeben ist, Gleichung (11) zur Bestimmung von β_{p0} bzw. t/L verwendet werden. In den folgenden Abschnitten soll gezeigt werden, wie man aus t/L, β_{p0} und den Geschwindigkeitsdreiecken ein möglichst kavitationssicheres Profil und dessen Staffelungswinkel β, welchen die Skelettsehne des Profils mit der Gitterachse einschließt, erhält.

3. Die genäherte Bestimmung der auftriebslosen Anströmrichtung im Gitterverband bei dünnen, schwach gewölbten Profilen. Bei sehr dünnen Profilen ist der Winkel, welchen die auftriebslose Anströmrichtung und die Skelettsehne miteinander bilden, nur von den Wölbungsparametern des Skeletts und den Gitterparametern abhängig.[2]

Bei mäßig dünnen Profilen kann man in erster Näherung den Dickeneinfluß dadurch berücksichtigen, daß man den Winkel β_{p0}, den die auftriebslose Anströmrichtung des Skeletts im Gitterverband mit der Gitterachse einschließt, um einen Betrag

$$\Delta\delta = -\frac{1}{K} (\chi_1 B_1 + \chi_2 B_2) \tag{12}$$

vermehrt. Hierin hängen B_1 und B_2, wie im folgenden gezeigt werden wird, gemäß Abb. 2 und Abb. 3 von den Gitterparametern β_{p0} und t/L ab. Die Winkel χ_1 und χ_2 werden gemäß Abb. 4

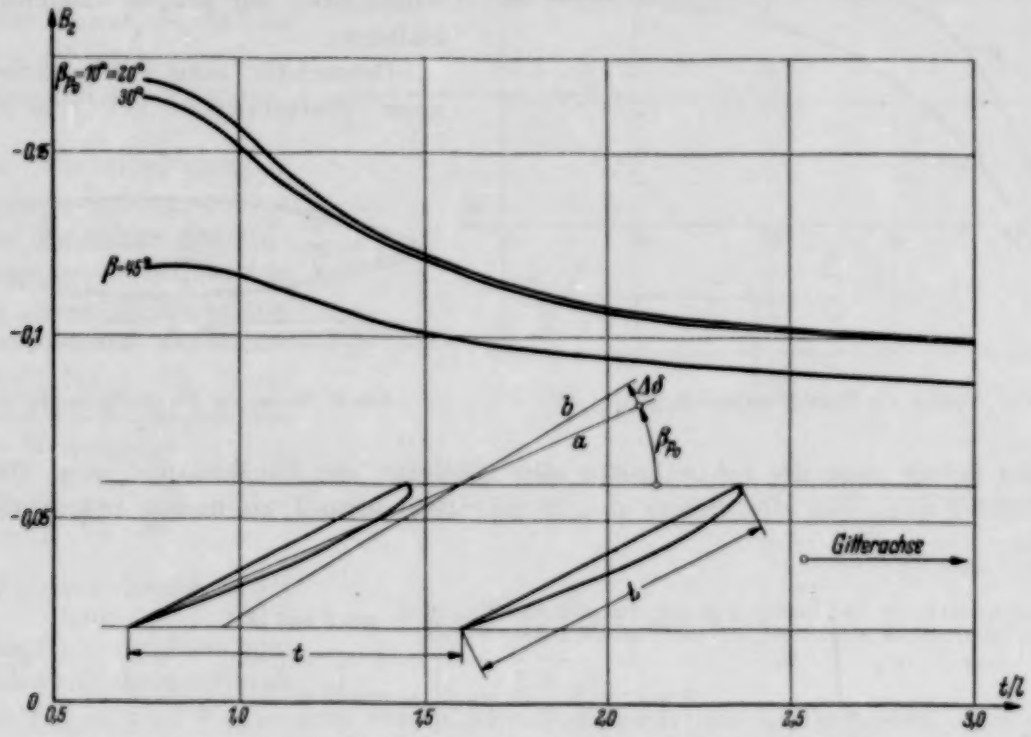

Abb. 2. Verlauf der Einfußfunktion $B_2(t/L, \beta_{p0})$ und Erläuterungsskizze zu den Gitterkenngrößen.

von den gegenüberliegenden Seiten eines Polygons gebildet, welches dem Profiltropfen einbeschrieben ist. Durch (12) wird auch der Einfluß des endlichen Hinterkantenwinkels χ_3 (Abb. 4) erfaßt, da dieser infolge der Schließbedingung für den Polygonzug wie folgt mit den beiden in (12) enthaltenen Winkeln χ_1 und χ_2 zusammenhängt:

$$\chi_3 = -\chi_1 - \chi_2 . \tag{13}$$

[1] Siehe die Arbeit von *Weinig* in Fußnote 8 von Seite 1.
[2] Siehe die Arbeit von *Pantell* in Fußnote 1 von Seite 2.

Ersetzt man den Profiltropfen dünner Profile mit rektifizierter Mittellinie analog Abb. 4 durch einen Polygonzug, dessen gegenüberliegende Seitenpaare die Winkel χ_i einschließen, dann bekommt man für die Neigungsänderung der auftriebslosen Richtung infolge endlicher Profildicke s_i die zu (12) analoge, allgemeine Beziehung

$$\Delta\delta = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{n-1} B_i \chi_i , \tag{14}$$

worin K und B_i näherungsweise nur von den Parametern eines aus den Skeletten der Profile gebildeten Gitters abhängen. Zu (14) gelangt man, wenn man zur Erzeugung des Profils jeden der n durch die Polygonabschnitte begrenzten ξ_i-Bereiche mit Einheitsquellen von jeweils konstanter Stärke q_i belegt, welche bekanntlich mit χ_i, der Polygondicke $s_{ip} \approx s_i$ und der ungestörten Anströmgeschwindigkeit w_∞ näherungsweise durch die Beziehungen

$$q_i = w_\infty \cdot \chi_i , \tag{15}$$

$$\chi_i = \frac{ds_{ip}}{d\xi_i} \tag{16}$$

verbunden sind. Der aus (16) folgende Geradenzug schließt sich dann zum Polygon, wenn man die Neigungswinkel χ_i gegenüberliegender Seiten der Bedingung

$$\sum_{i=1}^{n-1} \chi_i \Delta\xi_i = 0 \tag{17}$$

unterwirft, die sich für die gewählten drei Abschnitte zur obigen Gleichung (13) spezialisiert.

Betrachtet man ein gerades Profilgitter vom Staffelungswinkel $\beta \approx \beta_{p0}$ und der

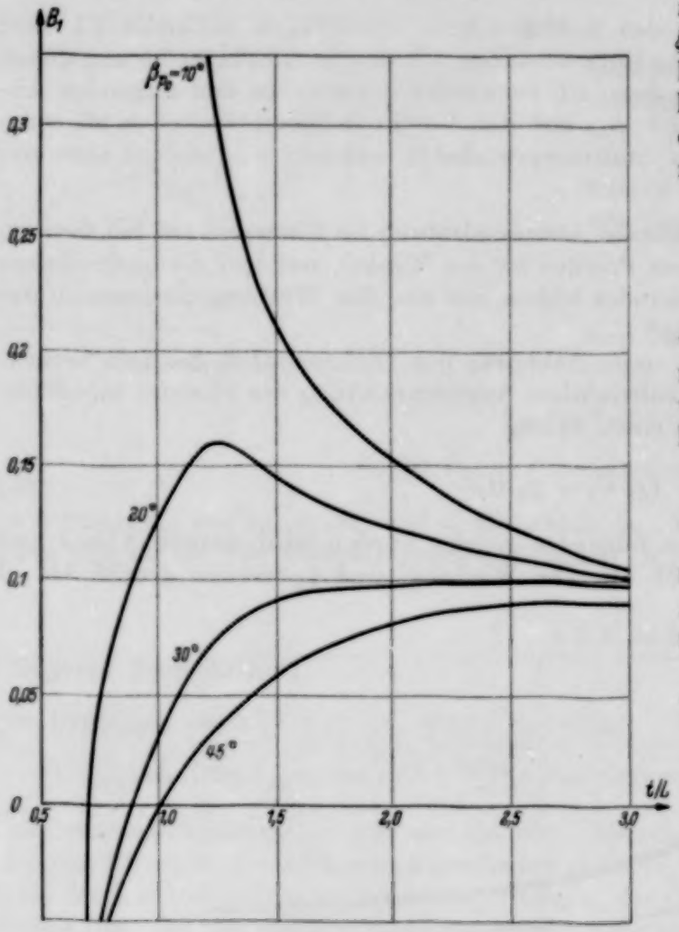

Abb. 3. Verlauf der Einflußfunktion $B_1\,(t/L, \beta_{p\,0})$.

Abb. 4. Ersatz des Profiltropfens durch ein Polygon.

Teilung t, und belegt man die i-Abschnitte aller Skelette mit Einheitsquellen q_i, dann erzeugen diese am Punkt $\xi = \xi_0$ von der Sehne des Aufskeletts normal zu dieser bekanntlich[1] die Geschwindigkeit

$$V_{\xi_0, q_i} = \frac{1}{2t} \int_{\xi_{iu}}^{\xi_{io}} q_i \frac{\cos\beta \, \mathfrak{Sin}\left[2\pi \frac{\xi_0 - \xi_i}{t} \sin\beta\right] - \sin\beta \sin\left[2\pi \frac{\xi_0 - \xi_i}{t} \cos\beta\right]}{\mathfrak{Cof}\left[2\pi \frac{\xi_0 - \xi_i}{t} \sin\beta\right] - \cos\left[2\pi \frac{\xi_0 - \xi_i}{t} \cos\beta\right]} \, d\xi_i . \tag{18}$$

Mit q_i aus (15) kann man V_{ξ_0, q_i} geschlossen darstellen als

$$V_{\xi_0, q_i} = -\frac{w_\infty \chi_i}{2\pi} \left\{ \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{\mathfrak{Tg}\left[\frac{\pi}{t}(\xi_0 - \xi_{iu}) \sin\beta\right]}{\operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{t}(\xi_0 - \xi_{iu}) \cos\beta\right]}\right] - \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{\mathfrak{Tg}\left[\frac{\pi}{t}(\xi_0 - \xi_{io}) \sin\beta\right]}{\operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{t}(\xi_0 - \xi_{io}) \cos\beta\right]}\right] \right\}, \tag{19}$$

wobei $\xi_{io} - \xi_{iu} = \Delta\xi_i$ die Erstreckung des i-ten Polygonabschnittes in ξ-Richtung ist.

[1] *N. Scholz*, Strömungsuntersuchung von Schaufelgittern, VDI-Forschungsheft 442 (1954) S. 29.

Diese mit einer tangentialen Umströmung des Skeletts (bzw. Profils) unverträgliche Geschwindigkeit erfordert eine zusätzliche Belegung der Skelette mit Einheitswirbeln der Stärke γ_q, deren Induktion normal zur Skelettsehne im Punkt ξ_0 die Geschwindigkeit $\sum_{i=1}^{n} V_{\xi_0, q_i}$ gerade aufhebt. Es muß also gelten

$$V_{\xi_0, \gamma_q} + \sum_{i=1}^{n} V_{\xi_0, q_i} = 0 \,. \tag{20}$$

Wählt man für γ_q die ersten drei Glieder der *Birnbaum*schen Reihe, dann kann der Bedingung (20) an drei Aufpunkten genügt werden. Es seien hierfür die von *Birnbaum* benutzten Punkte gewählt[1]. Dabei wird nach dem Vorgang von *Pantell*[2] näherungsweise β_∞ durch β_{p0} ersetzt. Für die Freiwerte a, b, c der ersten drei Glieder der Reihe von γ_q erhält man so drei lineare Gleichungen. Damit ergibt sich bei Beachtung der Schließbedingung (17) und mit den bekannten Beziehungen

$$c_a = \pi \left(2\,a + b + \frac{c}{3} \right), \tag{21a}$$

$$\Delta\delta = \frac{c_a}{2\,\pi\,K} \tag{21b}$$

der in (14) angegebene Zusammenhang, welcher sich für den hier behandelten aus drei Seitenpaaren bestehenden Polygonzug zu (12) spezialisiert[3].

4. Die genäherte Bestimmung der für die Kavitationssicherheit optimalen Schaufelform beim geraden Gitter in ebener Potentialströmung. Nach der Bemerkung am Schluß des Abschnittes 2 ist es wichtig, bei einem Gitter von gegebenen Parametern t/L und β_{p0} in einer Strömung von gegebenen Geschwindigkeitsdreiecken die kavitationssicherste Flügelform zu finden. Sie folgt aus der Forderung nach konstantem Druckverlauf auf der Saugseite des Flügels. Die Aufgabe werde gelöst unter der Annahme, daß es sich um dünne, schwach gewölbte Profile von kleinem Anstellwinkel handelt.

Wenn die Wirbelbelegung γ und die Quellenbelegung q vom Restgitter[4] auf der Sehne des Aufprofils die Längsgeschwindigkeiten $V_{\xi,\gamma,R}$ und $V_{\xi,q,R}$ erzeugen, dann führt die gewünschte konstante Geschwindigkeit längs der Saugseite w_s auf die bei kleinem Anstellwinkel gültige Beziehung[5]

$$w_s = w_\infty + \frac{\gamma}{2} + V_{\xi,\gamma,R} + V_{\xi,q,R} = \text{konst.} \tag{22}$$

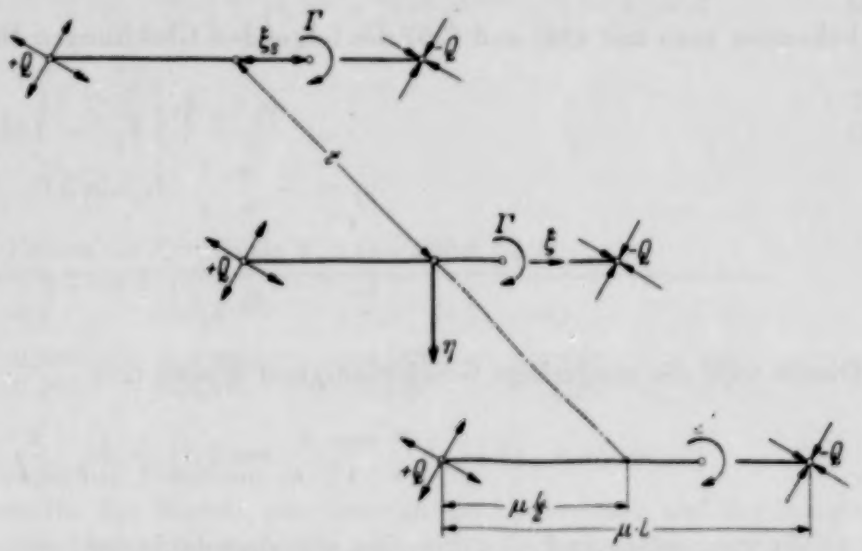

Abb. 5. Modell eines geraden Profilgitters zur angenäherten Bestimmung der vom Restgitter an einem Aufpunkt erzeugten Geschwindigkeiten.

Zur genäherten Bestimmung der Längsgeschwindigkeiten durch das Restgitter $V_{\xi,\gamma,R}$ und $V_{\xi,q,R}$ diene ein in Abb. 5 dargestelltes Gittermodell. Bei diesem wird die Verdrängungswirkung eines Profils von der maximalen Dicke s_{max} in einer Strömung von der ungestörten Anströmgeschwindigkeit w_∞ durch eine Quelle und Senke von der Stärke

$$Q = s_{max}\, w_\infty \tag{23}$$

---

[1] Siehe die Arbeit von *Birnbaum* in Fußnote 1 auf Seite 1.
[2] Siehe die Arbeit von *Pantell* in Fußnote 1 auf Seite 2.
[3] Die formelmäßige Abhängigkeit der Größen B_1 und B_2 von den Gitterparametern, welche aus der vorhergehenden Darstellung ohne Schwierigkeit folgt, ist hier wegen ihrer Weitläufigkeit unterdrückt.
[4] Unter Restgitter werden alle Flügel eines Gitters verstanden mit Ausnahme des sogenannten Aufflügels, welcher den Aufpunkt enthält.
[5] Siehe die Arbeit von *Schilhansl* in Fußnote 2 auf Seite 1.

erzeugt, welche im Abstand $+\mu L/2$ und $-\mu L/2$[1] vom Ursprung $\xi = 0$ (in der Mitte der Skelettsehne) liegen. Die Zirkulation um ein Profil, welche bekanntlich mit der Ablenkungsgeschwindigkeit Δc_u, der Teilung t und der Wirbelbelegung γ in dem Zusammenhang

$$\Gamma = \int_{-L/2}^{+L/2} \gamma \, d\xi = \Delta c_u \cdot t \tag{24}$$

steht, soll durch einen Stabwirbel verursacht werden, welcher im Druckmittelpunkt des Profils an der Stelle $\xi = \xi_s$ angeordnet ist. Dabei falle die ξ-Achse gemäß Abb. 5 in die Richtung der um den Winkel β gegen die Gitterachse geneigten Skelettsehne.

Entwickelt man die konjugierte Geschwindigkeit[2] der Singularitätenanordnung von Abb. 5 in eine Potenzreihe von ξ, dann ergibt bekanntlich das erste zu ξ umgekehrt proportionale Glied die Wirkung der einzelnen Singularität des Aufprofils wieder. Das folgende in ξ lineare Glied liefert dann in erster Näherung die Wirkung der übrigen Singularitäten. Auf diese Weise gewinnt man die Längsinduktion des Restgitters zu

$$V_{\xi,\gamma,R} + V_{\xi,p,R} = \frac{\pi}{6} \frac{(\xi - \xi_s)}{t} \Delta c_u \sin 2\beta - \frac{\pi \mu}{6} \frac{s_{max}}{t} \frac{L}{t} w_\infty \cos 2\beta \,. \tag{25}$$

Um die Gleichung (22) zu erfüllen, hebt man zweckmäßig das in ξ längs der Flügeloberfläche veränderliche Glied der letzten Gleichung (25) durch den Ansatz

$$\gamma = \gamma_0 + 2\,\gamma_\xi \frac{\xi}{L} \tag{26}$$

auf.

Über die Beziehung

$$\xi_s = \frac{1}{w_\infty \Gamma} \int_{-L/2}^{+L/2} \gamma \xi \, d\xi \tag{27}$$

bekommt man mit (24) und (26) die folgenden Gleichungen für γ_0, γ_ξ und ξ_s:

$$\gamma_0 = \Delta c_u \frac{t}{L} \,, \tag{28}$$

$$\gamma_\xi = -\frac{\pi}{6} \frac{L}{t} \Delta c_u \sin 2\beta \,, \tag{29}$$

$$\xi_s = -\frac{\pi}{36} \left(\frac{L}{t}\right)^2 L \sin 2\beta \,. \tag{30}$$

Damit wird die saugseitige Geschwindigkeit gemäß (22)

$$w_s = w_\infty \left(1 - \mu \frac{\pi}{6} \frac{s_{max}}{t} \frac{L}{t} \cos 2\beta\right) + \Delta c_u \left[\frac{t}{2L} + \frac{\pi^2}{216} \left(\frac{L}{t}\right)^3 \sin^2 2\beta\right]. \tag{31}$$

Mit $w_s = w_{s\,max}$ und $\mu = \frac{2}{3}$ ergibt sich auch der in der folgenden Bestimmungsgleichung für den *Thoma*schen Kavitationsbeiwert σ bei drallfreiem Austritt

$$\sigma = \eta_{s\,m} \frac{c_m^2}{2gH} + \lambda \frac{w_2^2}{2gH} \tag{32}$$

---

[1] Legt man Quelle und Senke in den Schwerpunkt der Quellen- und Senkenbelegung eines Profils, dann wird bei einer den Großausführungen näherungsweise entsprechenden, durch

$$s = 4\, s_{max} \left(\sqrt{\frac{\frac{L}{2} + \xi}{L}} - \frac{\frac{L}{2} + \xi}{L}\right)$$

gekennzeichneten Profiltropfenform der Wert $\mu = \frac{2}{3}$.

[2] Siehe etwa *W. Kaufmann*, Technische Hydro- und Aeromechanik, S. 298ff, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1954.

enthaltene Beiwert λ an dem betrachteten Profil zu

$$\lambda = \frac{w_{s\,max}^2}{w_\infty^2} - 1 = \frac{\left\{\left[\frac{\pi^2}{216}\left(\frac{L}{t}\right)^3 \sin^2 2\beta + \frac{t}{2L}\right]\frac{\Delta c_u}{w_\infty} - \frac{\pi}{9}\frac{s_{max}}{t}\frac{L}{t}\cos\beta + 1\right\}^2}{\frac{1}{4}\left(\frac{\Delta c_u}{w_\infty}\right)^2 + \frac{\Delta c_u}{w_\infty}\cos\beta_\infty + 1} - 1 \qquad (33\,a)$$

in Abhängigkeit von den Profil- und Gitterparametern β, t/L, s_{max} und den Größen Δc_u, w_∞ und β_∞ der Geschwindigkeitsdreiecke. Bei gegebener Ortshöhe h, Saughöhe h_s, Fallhöhe H und Dampfdruckhöhe h_d erfordert der kavitationsfreie Betrieb bekanntlich einen Kavitationsbeiwert von höchstens $\sigma_{max} = H^{-1}\,[10{,}33 - h_d - 0{,}0012\,h - h_s]$ (wobei alle Höhen in [m] vorausgesetzt werden). Dadurch ist mit den Geschwindigkeitsdreiecken und dem Saugrohrwirkungsgrad η_{sm} der Wert λ gegeben. Liegen $s_{max}:t$ und β für einen Zylinderschnitt fest, dann folgt das Überdeckungsverhältnis $L:t$ bei einem Flügel von konstantem saugseitigen Druck mit Rücksicht auf Kavitationssicherheit aus Gleichung (33 a), welche näherungsweise in der einfachen Form

$$\lambda = \left[\frac{t}{2L}\frac{\Delta c_u}{w_\infty} + 1\right]^2 - 1 \qquad (33\,b)$$

verwendet werden kann.

Die mit der Wirbelbelegung γ nach (26) verbundene Skelettform $\eta(\xi)$ wird bei $\gamma \ll w_\infty$ und unter den Voraussetzungen von *Birnbaum*[1]

$$\frac{2\eta}{L} = \frac{\Delta c_u}{w_\infty}\frac{t}{L}\left\{\frac{1}{2\pi}\left[F_1 + \frac{\pi}{12}\left(\frac{L}{t}\right)^2 \sin 2\beta\, F_2\right] - \frac{\pi}{24}\left(\frac{L}{t}\right)^2\left(\frac{2\xi}{L}\right)^2 \cos 2\beta - \frac{\pi^2}{432}\left(\frac{L}{t}\right)^4 \frac{2\xi}{L}\sin 4\beta\right\}$$

$$- \frac{\pi\,\mu}{6}\frac{s_{max}}{t}\frac{L}{t}\frac{2\xi}{L}\sin 2\beta\,. \qquad (34)$$

Hierin sind F_1 und F_2 die in Tabelle 1 tabellierten folgenden Funktionen:

$$F_1 = \left[1 + \frac{2\xi}{L}\right]\left[\ln\left(1 + \frac{2\xi}{L}\right) - 1\right] + \left[1 - \frac{2\xi}{L}\right]\left[\ln\left(1 - \frac{2\xi}{L}\right) - 1\right] + 2\,, \qquad (35)$$

$$F_2 = \left[1 - \left(\frac{2\xi}{L}\right)^2\right]\ln\left(\frac{1 + \frac{2\xi}{L}}{1 - \frac{2\xi}{L}}\right) + 2\,\frac{2\xi}{L}\,. \qquad (36)$$

Tabelle 1. *Verlauf der Funktionen F_1 und F_2 über $2\,\xi/L$*

$\frac{2\xi}{L}$	−0,45	−0,4	−0,3	−0,2	−0,1	±0
F_1	+0,989	0,736	+0,3865	+0,163	+0,041	±0
F_2	−2,3605	−2,392	−2,088	−1,512	−0,789	±0

F_1 ist eine gerade, F_2 eine ungerade Funktion in ξ.

Die in (34) angegebene Lösung für das Skelett mit konstantem Unterdruck auf der Saugseite gilt nicht an den Skelettenden. Man kann diesen Übelstand durch Extrapolation an den Enden beseitigen. Erfahrungsgemäß ist der Fehler dabei nicht groß. Am Profilkopf versagt ja ohnedies infolge der stets auftretenden starken Krümmung der Profiloberfläche die einfache Bedingungsgleichung (22) für konstante saugseitige Geschwindigkeit[2].

Die nach der obigen Methode ausgelegten Profile weisen auf Grund von vergleichenden Berechnungen mit einer genaueren Methode[3] eine angenähert konstante Geschwindigkeitsverteilung auf der Saugseite auf.

Als Beispiel ergeben sich für ein Gitter mit $\beta_{p0} = 20{,}5°$, $L/t = 0{,}86$ und ein durch $c_u:w_\infty = 0{,}287$ sowie $\beta_\infty = 27°$ gekennzeichnetes Ablenkungsdreieck bei $\mu = 2/3$ die in der Abb. 6 dargestellten Verläufe des Skeletts über $\frac{2\xi}{L}$. Man erkennt, daß das Einzelskelett von konstantem

[1] Siehe die Arbeit von *Birnbaum* in Fußnote 1 auf Seite 1.

[2] Um Geschwindigkeitsspitzen an der Eintrittskante, welche zu Kavitation führen können, zu unterdrücken, wird man diese entsprechend abrunden und so ausbilden, daß der eintrittsseitige Staupunkt in die Mitte des Bogens von der Profilnase fällt.

[3] Siehe die Arbeit von *Schlichting* in Fußnote 8 auf Seite 1.

saugseitigen Unterdruck symmetrisch zur η-Achse verläuft, daß das Skelett im geraden Gitterverband von unendlich dünnen Profilen einen S-Schlag hat und daß das Skelett im Gitterverband von dünnen Profilen einen dagegen etwas geringeren S-Schlag aufweist.

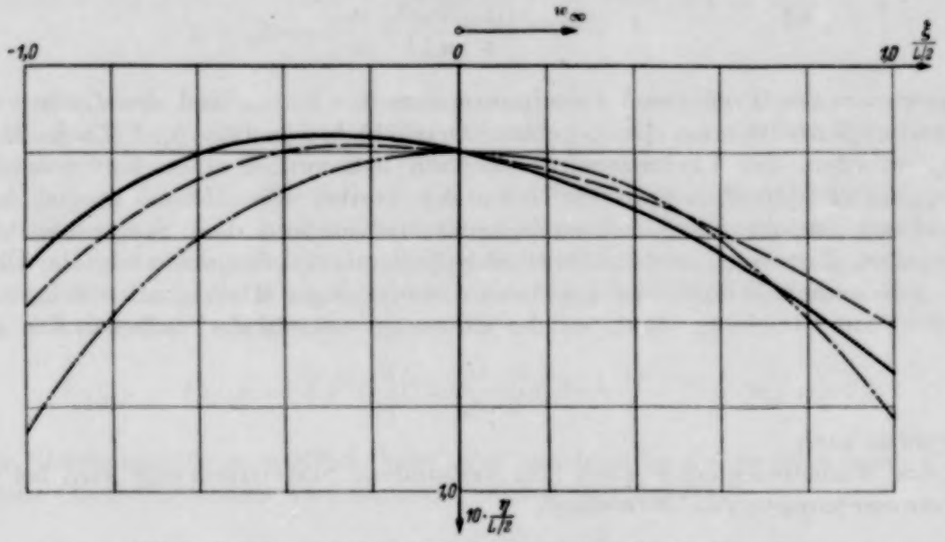

Abb. 6. Skelettformen bei angenähert konstantem Druck auf der Saugseite.

5. Die Abhängigkeit der Meridiangeschwindigkeit von der Drehzahl bei einer Teilturbine von gegebener Flügelform, Leitradstellung und gegebenen Verlustbeiwerten bei zweidimensionaler Betrachtung. Unter der Annahme rotationssymmetrischer Stromflächen innerhalb der aus Leitpaparat, Laufrad und Saugrohr gedachten Turbine und unter Voraussetzung koaxial zylindrischer Stromflächen (und damit ebener stationärer Potentialströmung im Laufrad) soll untersucht werden, wie sich die auf die Ausflußgeschwindigkeit bei der Fallhöhe H bezogene Meridiangeschwindigkeit $c_{m_{id}} = c_m : \sqrt{2\,g\,H}$ von einer zwischen zwei benachbarten Stromflächen liegenden Teilturbine mit der bezogenen Umfangsgeschwindigkeit $u_{id} = u : \sqrt{2\,g\,H}$ des zugehörigen Teilflügels ändert, wenn für diese Teilturbine der vor allem von der Leitradstellung abhängige absolute Zuströmwinkel zum Laufrad α_1 (Abb. 1), der auftriebslose Anströmwinkel β_{p0} vom Laufradgitter, dessen Teilungsverhältnis t/L und Gleitwinkel ε und die Saugrohrverlustbeiwerte ζ_{su} und ζ_{sm} (welche den Druckverlust im Saugrohr zu $h = \zeta_{sm}\, c_m^2/2\,g + \zeta_{su}\, c_{u2}^2/2\,g$ bestimmen) gegeben sind.

Berücksichtigt man den Einfluß der Reibung durch geeignete Wahl des Beiwertes m in (2), dann ist der Zusammenhang zwischen der bezogenen Umlenkungsgeschwindigkeit $\Delta c_{u_{id}} = \Delta c_u : \sqrt{2\,g\,H}$ und $c_{m_{id}}$ gemäß (11b) durch

$$\Delta c_{u_{id}} = \frac{2}{\varkappa + 1}\left[(\operatorname{ctg}\alpha_1 + \operatorname{ctg}\beta_{p0})\, c_{m_{id}} - u_{id}\right] \tag{37}$$

gegeben.

Die Turbinenhauptgleichung lautet in bezogenen Geschwindigkeiten

$$2\, u_{id}\, \Delta c_{u_{id}} = \eta_h\,. \tag{38}$$

Hierin ist bekanntlich[1] der hydraulische Wirkungsgrad η_h in erster Näherung in nachstehender Weise von den bezogenen Geschwindigkeiten u_{id}, $\Delta c_{u_{id}}$, $c_{m_{id}}$, der Zuströmrichtung α_1, dem Gleitwinkel ε und den Saugrohrverlustbeiwerten ζ_{sm} und ζ_{su} abhängig:

$$\eta_h = 1 - \varepsilon\frac{u_{id}}{c_{m_{id}}} - \zeta_{sm}\, c_{m_{id}}^2 - \zeta_{su}\,(c_{m_{id}}\operatorname{ctg}\alpha_1 - \Delta c_{u_{id}})^2\,. \tag{39}$$

Damit ergibt sich aus den letzten beiden Gleichungen

$$\Delta c_{u_{id}} = -\frac{u_{id}}{\zeta_{su}} + \operatorname{ctg}\alpha_1\, c_{m_{id}} \overset{+}{(-)} \sqrt{\frac{1}{\zeta_{su}} - \frac{\varepsilon\, u_{id}}{\zeta_{sm}\, c_{mid}} - \frac{2\operatorname{ctg}\alpha_1\, c_{mid}\, u_{id}}{\zeta_{su}} - \frac{\zeta_{sm}\, c_{m_{id}}^2}{\zeta_{su}} + \frac{u_{id}^2}{\zeta_{su}^2}}\,. \tag{40}$$

[1] *C. Keller* und *H. Bleuler*, Escher-Wyss-Mitteilungen 10 (1937) S. 85.

Durch Elimination von $\Delta c_{u_{id}}$ aus (37) und (40) bekommt man die gesuchte Abhängigkeit in der Form

$$A\, c_{m_{id}}^3 + 2\, B\, c_{m_{id}}^2\, u_{id} - C\, c_{m_{id}}\, u_{id}^2 - c_{m_{id}} + \varepsilon\, u_{id} = 0\,. \tag{41}$$

Dabei sind die Beiwerte A, B und C in nachstehender Weise durch die Parameter der Teilturbine bestimmt:

$$A = \zeta_{sm} + \zeta_{su}\,[\operatorname{ctg}\alpha_1 - N\,(\operatorname{ctg}\alpha_1 + \operatorname{ctg}\beta_{p0})]^2\,, \tag{42}$$

$$B = N\,[(\operatorname{ctg}\alpha_1 + \operatorname{ctg}\beta_{p0})\,(1 - \zeta_{su}\,N) + \zeta_{su}\operatorname{ctg}\alpha_1]\,, \tag{43}$$

$$C = 2\,N - \zeta_{su}\,N^2\,, \tag{44}$$

mit

$$N = \frac{2}{\varkappa + 1}\,, \tag{45}$$

wobei $\varkappa$ aus (8) folgt. Für $\varepsilon = 0$ erhält man die bezogene Meridiangeschwindigkeit zu

$$c_{m_{id,0}} = -\frac{B}{A}\, u_{id} \overset{+}{(-)} \sqrt{\left(\frac{B}{A}\right)^2 u_{id}^2 + \frac{C}{A}\, u_{id}^2 + \frac{1}{A}}\,, \tag{46}$$

während für kleine Werte von ε aus (46) die angenäherte Beziehung

$$c_{m_{id}} = c_{m_{id,0}} - \varepsilon\, \frac{u_{id}}{2\, c_{mid,0}\,(A\, c_{mid,0} + B\, u_{id})} \tag{47}$$

folgt.

Da der Gleitwinkel im allgemeinen klein ist und dessen Beiwert in (47) etwa die Größe der Einheit hat, ist der Einfluß des Gleitwinkels auf den Verlauf der Meridiangeschwindigkeit über der Um-

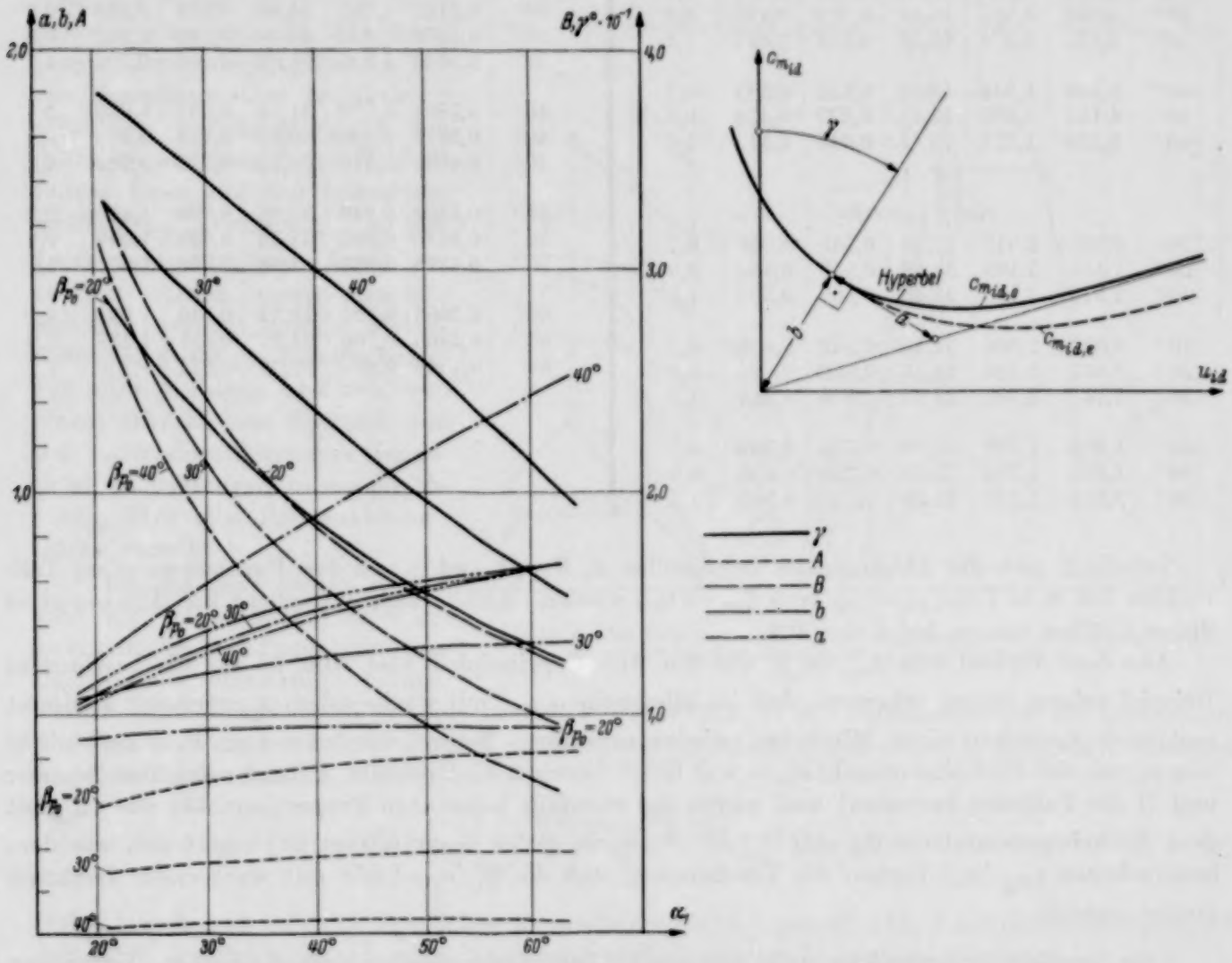

Abb. 7. Verlauf von γ, A, B, b, a über α_1 bei $L/t = 0{,}9$ $\zeta_{sm} = 0{,}2$, $\zeta_{su} = 1{,}0$ und schematischer Verlauf von $c_{mid_0}\,(u_{id})$ bzw. $c_{mid_\varepsilon}\,(u_{id})$.

fangsgeschwindigkeit gering. An Stelle der $c_{m_{id}}(u_{id})$-Linie werde daher die den Gleitwinkeleinfluß nicht enthaltende $c_{m_{id,0}}(u_{id})$-Linie diskutiert. Letztere ist mit (46) als eine Hyperbel[1] gegeben, deren Halbachsen

$$a = (A\cos^2\gamma + B\sin 2\gamma - C\sin^2\gamma)^{-1/2} \tag{48}$$

$$b = (A\sin^2\gamma + B\sin 2\gamma + C\cos^2\gamma)^{-1/2} \tag{49}$$

um den Winkel

$$\gamma = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{2B}{A+B} \tag{50}$$

im Gegenzeigersinn zur u_{id}- bzw. $c_{m_{id,0}}$-Achse gedreht sind, wie dies Abb. 7 erläutert.

Tabelle 2. *Die Größen A, B, γ, a und b in Abhängigkeit von bei $\zeta_{sm} = 0{,}2$ und $\zeta_{su} = 1{,}0$*

	A	B	$\gamma°$	a	b	L/t
			für $\beta_{p0} = 20°$			
20°	0,9113	3,182	36,72	0,546	0,553	0,7
20°	3,036	3,360	29,14	0,579	0,452	0,9
20°	4,665	3,350	24,48	0,610	0,402	1,1
30°	1,496	2,323	30,96	0,649	0,578	0,7
30°	3,530	2,398	23,01	0,696	0,470	0,9
30°	4,930	2,358	18,85	0,712	0,418	1,1
40°	1,886	1,864	26,22	0,726	0,598	0,7
40°	3,872	1,884	18,53	0,765	0,472	0,9
40°	5,068	1,826	15,17	0,775	0,424	1,1
50°	2,165	1,565	22,41	0,784	0,599	0,7
50°	4,008	1,551	15,63	0,803	0,475	0,9
50°	5,170	1,479	12,50	0,818	0,427	1,1
60°	2,390	1,344	19,62	0,830	0,593	0,7
60°	4,152	1,303	13,15	0,839	0,474	0,9
60°	5,230	1,223	10,45	0,840	0,428	1,1
			für $\beta_{p0} = 30°$			
20°	0,5875	3,015	37,34	0,545	0,588	0,7
20°	1,456	3,105	33,63	0,550	0,550	0,9
20°	2,019	3,115	31,40	0,569	0,505	1,1
30°	0,8920	2,086	32,44	0,652	0,658	0,7
30°	1,682	2,120	28,15	0,662	0,596	0,9
30°	2,147	2,106	25,83	0,674	0,562	1,1
40°	1,094	1,599	27,99	0,715	0,709	0,7
40°	1,816	1,598	23,59	0,736	0,631	0,9
40°	2,215	1,573	21,38	0,745	0,595	1,1
50°	1,237	1,278	24,00	0,782	0,744	0,7
50°	1,900	1,255	19,73	0,791	0,653	0,9
50°	2,258	1,223	17,69	0,797	0,615	1,1
60°	1,3480	1,038	20,35	0,831	0,760	0,7
60°	1,964	1,001	16,36	0,833	0,666	0,9
60°	2,291	0,966	14,53	0,847	0,630	1,1
			für $\beta_{p0} = 40°$			
20°	0,2010	2,735	38,32	0,554	0,651	0,7
20°	0,2650	2,823	37,93	0,546	0,637	0,9
20°	0,3815	2,855	37,33	0,545	0,626	1,1
30°	0,2182	1,783	34,86	0,654	0,828	0,7
30°	0,3108	1,833	34,09	0,646	0,803	0,9
30°	0,4048	1,845	33,34	0,646	0,786	1,1
40°	0,2504	1,279	31,10	0,732	0,989	0,7
40°	0,3412	1,306	30,08	0,723	0,954	0,9
40°	0,4187	1,310	29,26	0,722	0,933	1,1
50°	0,2802	0,949	27,08	0,790	1,131	0,7
50°	0,3636	0,962	25,84	0,785	1,099	0,9
50°	0,4278	0,959	24,96	0,776	1,079	1,1
60°	0,3063	0,704	22,53	0,848	1,294	0,7
60°	0,3803	0,706	21,27	0,832	1,235	0,9
60°	0,4348	0,699	20,39	0,827	1,200	1,1

Tabelle 2 gibt die Abhängigkeit der Größen A, B, a, b und γ von den Parametern einer Teilturbine bei $m = 2\pi$, $\zeta_{su} = 1{,}0$ und $\zeta_{sm} = 0{,}2$ wieder. Abb. 7 veranschaulicht die Abhängigkeit dieser Größen von α_1 bei $L:t = 0{,}9$.

Aus dem Verlauf von $c_{m_{id}}(u_{id})$, wie ihn Abb. 7 prinzipiell und Abb. 23 für ein bestimmtes Beispiel zeigen, ist zu erkennen, daß im allgemeinen $c_{m_{id}}$ mit wachsendem u_{id} zunächst abnimmt und nach Erreichen eines Minimums wieder zunimmt. Wegen der bekannten Proportionalität von u_{id} mit der Einheitsdrehzahl $n_{11} = n\,D\,H^{-1/2}$ (worin n die Drehzahl, D den Laufraddurchmesser und H die Fallhöhe bedeuten) und wegen der ebenfalls bekannten Proportionalität von $c_{m_{id}}$ mit dem Einheitsgesamtstrom $Q_{11} = Q\,D^{-2}\,H^{-1/2}$ (worin Q der Gesamtstrom ist) ergibt sich aus dem besprochenen $c_{m_{id}}(u_{id})$-Verlauf die Erscheinung, daß die $Q_{11}(n_{11})$-Linie mit wachsender Drehzahl steiler ansteigt.

[1] Ein derartiger Zusammenhang ergibt sich auch bei Zugrundelegung der Stromfadentheorie in Verbindung mit den üblichen Ansätzen für den Stoßverlust, Laufradverlust und Diffusorverlust. Hierüber siehe *C. Pfleiderer*, Strömungsmaschinen, S. 186, Berlin, 1957.

6. Die Abhängigkeit der Meridiangeschwindigkeit von der Form des Leitapparats und dem Gesamtstrom bei freien Wirbeln geringer Stärke. Die achsensymmetrische Meridianpotentialströmung durch einen Rotationshohlraum, dessen Randstromflächen denen des Leitapparates entsprechen, sei bekannt und durch ihre Meridianstromlinien sowie die vom gegebenen Gesamtstrom abhängige Geschwindigkeit $c_{m,Pot}$ gekennzeichnet, die wirbelfrei angenommene Zuströmung zum Leitrad ebenfalls. Damit ist bei gegebener Leitradstellung und bestimmbaren Meridianpotentialstromlinien in erster Näherung der Winkel α_0, den die Stromlinien an der Leitradaustrittskante mit der Umfangsrichtung einschließen, berechenbar.[1] Hieraus folgt im allgemeinen bei konstant über die Leitschaufeleintrittsbreite angenommenem Zuströmdrall ein längs der Leitradaaustrittskante veränderlicher Drall, welcher mit der Meridiangeschwindigkeit der Potentialströmung am Leitradaustritt $c_{m\,Pot,0}$ annähernd zu $r_0 \operatorname{ctg} \alpha_0\, c_{m\,Pot,0}$ angesetzt werden kann. Infolge einer demzufolge längs der Schaufelbreite veränderlichen Zirkulation um eine Leitschaufel treten von deren Austrittskante freie Wirbel in die Strömung mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{c}$, von welcher angenommen werde, daß sie sich aus der durch die freien Wirbel induzierten Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ und einer Geschwindigkeit $\mathfrak{c}_{Pot}$ zusammensetze, entsprechend

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_{Pot} + \mathfrak{v} \,. \tag{51}$$

Das durch $\mathfrak{c}_{Pot}$ gekennzeichnete Strömungsfeld verlaufe auf den Stromflächen der Meridianpotentialströmung und habe axiale und radiale Geschwindigkeitskomponenten $c_{x\,Pot}$, $c_{r\,Pot}$, die aus der Zerlegung von $c_{m\,Pot}$ folgen und eine Umfangskomponente, die sich unter Voraussetzung kleiner Wirbelstärken über den Drallsatz aus dem Leitradaustrittsdrall zu $c_{u\,Pot} = \frac{r_0}{r} c_{m\,Pot,0} \operatorname{ctg} \alpha_0$ ergibt und damit auch durch die Meridianpotentialströmung gegeben ist. Die zur Berechnung der Induktion $\mathfrak{v}$ erforderliche Zirkulation $d^2\Gamma$ um das Element eines freien Wirbelfadens kann aus den bekannten Größen $c_{m\,Pot,0}$ und $c_{r\,Pot,0}$ an der Leitradaustrittskante dann berechnet werden, wenn man annähernd annimmt, daß die Wirbelfäden den durch $\mathfrak{c}_{Pot}$ beschriebenen Stromlinien folgen und sich, von einem sehr kleinen Abstand von der Leitradaustrittskante beginnend, in Umfangsrichtung gleichmäßig über eine Potentialstromfläche verteilen.

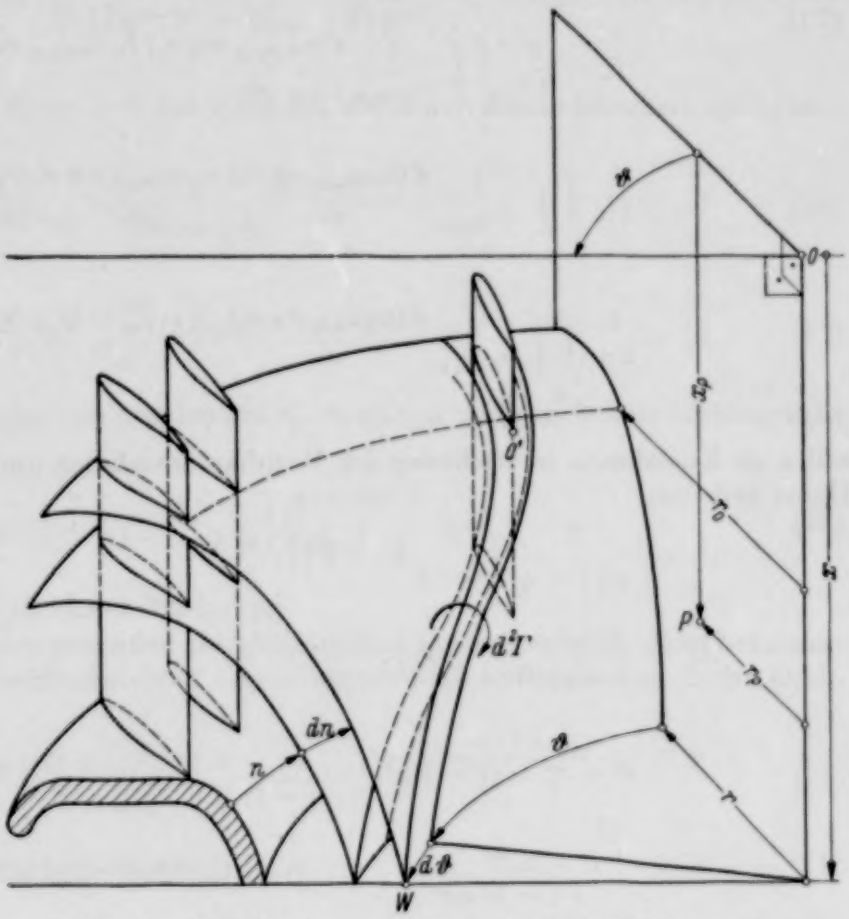

Abb. 8. Zur Induktion eines von der Leitschaufelaustrittskante ausgehenden Wirbelfadenelements W an einem Aufpunkt P.

Schneidet man gemäß Abb. 8 aus der Stromschicht zwischen zwei benachbarten Potentialstromflächen eine Stromröhre heraus, welche zugleich Wirbelröhre ist, die an dem Punkt $W(\vartheta, r, x)$ in Umfangsrichtung die Erstreckung $r\,d\vartheta$ und normal zu den Stromflächen die Länge dn hat, dann ergibt sich die gesuchte Zirkulation um diese Stromröhre zu

$$d^2\Gamma = \frac{1}{c_{r\,Pot,0}} \frac{d\,(c_{m\,Pot,0} \operatorname{ctg} \alpha_0)}{dx} c_{m\,Pot}\, r\, dn\, d\vartheta \,. \tag{52}$$

Dabei beziehen sich die mit dem Zeiger 0 versehenen Größen gemäß Abb. 8 auf den Schnittpunkt 0′ der durch den Punkt W gehenden Potentialstromlinie mit der Leitradaustrittskante.

[1] Siehe die Arbeit auf *Strscheletzky* in Fußnote 6 von Seite 1.

Sind $\mathfrak{u}^\circ$, $\mathfrak{r}^\circ$ und $\mathfrak{x}^\circ$ die Einheitsvektoren am Punkt W in tangentialer, radialer und axialer Richtung und $c_{u\,Pot}$, $c_{r\,Pot}$, $c_{x\,Pot}$ die analogen Komponenten der Geschwindigkeit $\mathfrak{c}_{Pot}$, dann wird der Vektor eines zu $\mathfrak{c}_{Pot}$ parallelen Wirbelelementes im Punkte W

$$d\mathfrak{l} = \left[\mathfrak{u}^\circ\left(\frac{c_{u\,Pot}}{c_{r\,Pot}}\cos\vartheta + \sin\vartheta\right) + \mathfrak{r}^\circ\left(-\frac{c_{u\,Pot}}{c_{r\,Pot}}\sin\vartheta + \cos\vartheta\right) + \mathfrak{x}^\circ\frac{c_{x\,Pot}}{c_{r\,Pot}}\right]dr\,. \tag{53}$$

Der Abstandsvektor von einem Aufpunkt P ($\vartheta = 0$, $r = r_p$, $x = x_p$) zum Punkt $W(\vartheta, r, x)$ eines Wirbelelements ist

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{u}^\circ\, r\sin\vartheta + \mathfrak{r}^\circ\,(r\cos\vartheta - r_P) + \mathfrak{x}^\circ\,(x - x_P). \tag{54}$$

Die von einem mit freien Wirbeln erfüllten Gebiet G in P induzierte Geschwindigkeit folgt mit dem *Biot Savart*schen Gesetz zu

$$\mathfrak{v} = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_G \frac{d^2\Gamma\,[\mathfrak{a}, d\mathfrak{l}]}{|\mathfrak{a}|^3} \equiv \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{|\mathfrak{a}|\neq 0} \frac{d^2\Gamma\,[\mathfrak{a}, d\mathfrak{l}]}{|\mathfrak{a}|^3} + \lim_{|\mathfrak{a}|\to 0}\frac{1}{4\pi}\iiint \frac{d^2\Gamma\,[\mathfrak{a}, d\mathfrak{l}]}{|\mathfrak{a}|^3}\,. \tag{55}$$

Da das letzte Glied von (55) verschwindet, ergeben sich für die Komponenten der induzierten Geschwindigkeit in radialer, axialer und tangentialer Richtung nach Integration über den Bereich $0 < \vartheta < 2\pi$ die Ausdrücke

$$v_r = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_G \frac{1}{c_{r\,Pot,0}}\,\frac{d\,(c_{m\,Pot,0}\operatorname{ctg}\alpha_0)}{dx}\,\frac{r_0\,c_{m\,Pot,0}\operatorname{ctg}\alpha_0\,(x - x_p)\,J_1\,dn\,ds}{p^3}\,, \tag{56}$$

$$v_x = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_G \frac{1}{c_{r\,Pot,0}}\,\frac{d\,(c_{m\,Pot,0}\operatorname{ctg}\alpha_0)}{dx}\,\frac{r_0\,c_{m\,Pot,0}\operatorname{ctg}\alpha_0\,(r_p\,J_1 - r\,J_2)\,dn\,ds}{p^3}\,, \tag{57}$$

$$v_u = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_G \frac{r}{c_{r\,Pot,0}}\,\frac{d\,(c_{m\,Pot,0}\operatorname{ctg}\alpha_0)}{dx}\,\frac{\{[r\,c_{x\,Pot} - (x - x_p)\,c_{r\,Pot}]\,J_1 - r_p\,c_{x\,Pot}\,J_2\}\,dn\,ds}{p^3} \tag{58}$$

mit s als Koordinate in Richtung der Meridianstromlinien und n als Koordinate normal zu diesen. Dabei bedeuten

$$J_1 = \frac{2}{q\sqrt{1+q}}\left(\frac{1}{1-q}E - F\right), \tag{59}$$

$$J_2 = \frac{2}{1-q)\sqrt{1+q}}\,E\,, \tag{60}$$

$$q = \frac{2\,r\,r_p}{r^2 + r_p^2 + (x - x_p)^2}\,, \tag{61}$$

$$F = \int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}\,, \qquad \text{(vollständiges elliptisches Integral erster Gattung),} \tag{62}$$

$$E = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi\,, \qquad \text{(vollständiges elliptisches Integral zweiter Gattung),} \tag{63}$$

$$k = \sqrt{\frac{2\,q}{1+q}}\,, \tag{64}$$

$$p = [r^2 + r_p^2 + (x - x_p)^2]^{1/2}\,. \tag{65}$$

Die Integrale der Gleichungen (56) und (58) erstrecken sich über das wirbelerfüllte Gebiet G in der Meridianebene hinter dem Leitrad und sind im allgemeinen nur dann graphisch lösbar, wenn die auf die Leitradaustrittskante folgende Begrenzung des Gebietes G bekannt ist. Legt man dem

Laufradentwurf, wie üblich die durch das Laufrad nicht gestörte Zuströmung vom Leitapparat zugrunde, dann erstreckt sich G von der Leitradaustrittskante stromwärts theoretisch bis ins Unendliche. Da den Gleichungen (56) bis (58) rotationssymmetrische Stromlinien zugrunde gelegt sind, ist G in der Praxis unter Umständen durch den Eintrittsquerschnitt in ein nicht rotationssymmetrisch ausgebildetes Saugrohr zu begrenzen.

7. Der Laufradentwurf bei zweidimensionaler Strömung. a) Die hinsichtlich Kavitationssicherheit und Wirkungsgrad optimalen Kenngrößen des äußeren Flügelschnittes. Es werde die spezifische Drehzahl n_s wegen der im allgemeinen vorgegebenen Anlagedaten, wie der Fallhöhe H, dem Wasserstrom Q und der Drehzahl n als ein durch die Beziehung $n_s = n\left(\frac{\gamma\,\eta_h\,Q}{75}\right)^{1/2} H^{-3/4}$ gegebener Parameter angesehen. Dasselbe gelte vom hydraulischen Wirkungsgrad η_h dort, wo seine Änderung vernachlässigbar ist. Außerdem werde drallfreier Austritt angenommen. Der in (32) definierte *Thoma*sche Kavitationsbeiwert σ, welcher mit dem nahezu konstanten, im Wesentlichen nur vom Nabenverhältnis ν abhängigen Beiwert

$$A = 30\left[\frac{\gamma\,(1-\nu^2)}{75\,\pi}\right]^{1/2} g^{3/4}\,\eta_h^{\,5/4} \tag{66}$$

wie folgt von der Durchflußziffer $\varphi = c_m/u$, dem Saugrohrwirkungsgrad $\eta_{sm} = 1 - \zeta_{sm}$ und dem Beiwert λ (33) abhängt

$$\sigma = \left(\frac{n_s}{A}\right)^{4/3} \frac{\eta_h}{2}\left[\lambda\,\varphi^{-2/3} + (\eta_{sm} + \lambda)\,\varphi^{4/3}\right], \tag{67}$$

nimmt unter der Optimalbedingung $d\sigma/d\varphi = 0$ bei einer für die Kavitationssicherheit optimalen Durchflußziffer

$$\varphi_{\sigma_{opt}} = \left[\frac{\lambda}{2\,(\eta_{sm} + \lambda)}\right]^{1/2} \tag{68}$$

den folgenden Bestwert an:

$$\sigma_{opt} = \frac{3}{4}\,\eta_h\left(\frac{n_s}{A}\right)^{4/3}[2\,(\eta_{sm} + \lambda)]^{1/3}\,\lambda^{2/3}. \tag{69}$$

Andererseits macht bei einer Turbine von gegebenem n_s, A, η_h, η_{sm} und gegebenem Gleitwinkel ε eine Durchflußziffer von der Größe

$$\varphi_{h_v\,opt} = \frac{2}{3}\left[\frac{\varepsilon}{(1-\eta_{sm})\,\eta_h}\left(\frac{A}{n_s}\right)^{4/3}\right]^{3/7} \tag{70}$$

den hydraulischen Gesamtverlust h_v zu einem Minimum[1].

Setzt man die aus (68) und (70) sich ergebenden Durchflußziffern einander gleich, dann bekommt man die folgende, für die Kavitationssicherheit und Strömungsverluste optimale spezifische Drehzahl:

$$n_{s_{opt}} = \frac{30}{\sqrt{\pi}}\,g^{3/4}\left[\frac{\eta_h\,\gamma\,(1-\nu^2)}{75}\right]^{1/2}\left[\frac{3}{2}\,\frac{\varepsilon}{(1-\eta_{sm})}\right]^{3/4}\left[\frac{2\,(\eta_{sm}+\lambda)}{\lambda}\right]^{7/8}. \tag{71}$$

Beispielsweise erhält man für eine Turbine mit $\nu = 0{,}45$ $\eta_h = 0{,}9$, $\eta_{sm} = 0{,}9$, $\varepsilon = 0{,}01$, $\lambda = 0{,}12$ einen Wert von $n_{s_{opt}} = 795$.

Aus (69) und (71) ergibt sich mit $n_s = n_{s_{opt}}$ ein bezüglich Strömungsverlust und Kavitationssicherheit optimaler Kavitationsbeiwert von

$$\sigma^x_{opt} = \frac{9}{4}\,\frac{\varepsilon}{1-\eta_{sm}}\,(\eta_{sm} + \lambda)^{3/2}\,\lambda^{-1/2}. \tag{72}$$

Hieraus erhält man für die Turbine mit den oben angenommenen Daten $\sigma^x_{opt} = 0{,}945$.

Aus der bekannten Beziehung

$$n_s = \frac{30}{\sqrt{\pi}}\,(2\,g)^{3/4}\left[\frac{\gamma\,\eta_h\,(1-\nu^2)}{75}\right]^{1/2} u_{id}^{\,3/2}\,\varphi^{1/2}, \tag{73}$$

[1] Siehe die Arbeit von *Keller* und *Bleuler* in Fußnote 1 auf Seite 8.

welche exakt für eine über den Durchflußquerschnitt konstante Meridiangeschwindigkeit gilt, ergibt sich, wenn man $n_s = n_{s_{opt}}$ und $\varphi = \varphi_{s_{opt}}$ setzt, die hinsichtlich Kavitationsfestigkeit und Wirkungsgrad optimale bezogene Umfangsgeschwindigkeit

$$u_{id_{opt}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{3}{2} \frac{\varepsilon}{1-\eta_{sm}}\right]^{1/2} \left[\frac{2(\eta_{sm}+\lambda)}{\lambda}\right]^{3/4}. \tag{74}$$

Hieraus erhält man beispielsweise für eine Turbine mit $\eta_{sm} = 0{,}9$, $\varepsilon = 0{,}008$, $\lambda = 0{,}15$ den Wert $u_{id_{opt}} = 1{,}76$. Aus (74) kann bei gegebenem H und n der mit Rücksicht auf Kavitationssicherheit und Wirkungsgrad optimale Durchmesser eines Laufrades bestimmt werden.

b) Der Laufradentwurf in zweidimensionaler Behandlung mit Berücksichtigung der Verträglichkeit der Strömung vom Laufrad und Leitrad. Im Folgenden wird dem Laufradentwurf das vom Leitapparat bei fortgedachtem Laufrad vor diesem erzeugte Geschwindigkeitsfeld mit den Komponenten $c_{m_{id}}$ und $c_{u_{1_{id}}}$ zugrunde gelegt. Die Leitschaufelöffnung wird dabei so gewählt, daß für die aus der Entwurfsdrehzahl n, dem Laufradaußendurchmesser D_a, dem Entwurfsgefälle H und einem zunächst geschätzten hydraulischen Wirkungsgrad η_h folgende bezogene Umfangsgeschwindigkeit u_{id} an einem mittlerem Stromfaden annähernd drallfreier Austritt vorliegt. Mit dem Gitterverstärkungsfaktor K aus einer durch (3) symbolisierten Beziehung zu β_{p0} und t/L, dem Auftriebsbeiwert c_a gemäß (2) dem Winkel der ungestörten Anströmrichtung gegen den Umfang (Abb. 1)

$$\beta_\infty = \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{u_{id} - c_{u_{1_{id}}} + \frac{1}{2}\left(c_{u_{1_{id}}} - c_{u_{2_{id}}}\right)}{c_{m_{id}}}\right], \tag{75}$$

dem Gleitwinkel im Gitterverband

$$\varepsilon = \operatorname{arc\,tg} \frac{c_w(\beta_\infty - \beta_{p0})}{m\,k \sin(\beta_\infty - \beta_{p0})}, \tag{76}$$

(wobei der Zähler der rechten Seite in symbolischer Schreibart die Abhängigkeit des Widerstandsbeiwertes c_w vom Anstellwinkel $\beta_\infty - \beta_{p0}$ verdeutlichen soll[1]), der *Bauersfeld*schen Gleichung

$$c_a = \frac{2\,t\left(c_{u_{1_{id}}} - c_{u_{2_{id}}}\right)\sin\beta_\infty}{L\,c_{m_{id}}(1 - \operatorname{tg}\varepsilon \operatorname{ctg}\beta_\infty)}, \tag{77}$$

dem hydraulischen Wirkungsgrad als Produkt der Wirkungsgrade von Laufrad- und Saugrohrstufe

$$\eta_h = \frac{1}{1 + \dfrac{\sin\varepsilon\, c_{m_{id}}}{\sin(\beta_\infty - \varepsilon)\sin\beta_\infty\, u_{id}}}\left[1 - \zeta_{sm} c_{m_{id}}^2 - \zeta_{su} c_{u_{2_{id}}}^2\right] \tag{78}$$

und der Turbinenhauptgleichung

$$u_{id}\left(c_{u_{1_{id}}} - c_{u_{2_{id}}}\right) = \frac{\eta_h}{2} \tag{79}$$

kann man bei aus der Zuströmung bekanntem $c_{m_{id}}$ und $c_{u_{1_{id}}}$, bei erfahrungsgemäß bekanntem ζ_{su}, ζ_{sm} und m und wahlweise vorgegebenen Werten c_a, $c_{u_{2_{id}}}$, t/L usf. die verbleibenden sieben Unbekannten aus den sieben Gleichungen (2), (3), (75), (76), (77), (78), (79) bestimmen. Zur Auslegung eines Flügels bei gegebener Zuströmung vom Leitapparat also gegebenem $c_{m_{id}}$ und $c_{u_{1_{id}}}$ werde die Aufgabe auf die drei folgenden, praktisch bedeutsamen Fälle I, II und III beschränkt:

Fall I. Berechnung von β_∞, β_{p0}, ε, η_h, K, $c_{u_{2_{id}}}$ und t/L, wenn c_a gegeben ist.

Fall II. Berechnung von β_∞, β_{p0}, ε, η_h, K, c_a und t/L, wenn $c_{u_{2_{id}}}$ gegeben ist.

Fall III. Berechnung von β_∞, β_{p0}, ε, η_h, K, c_a und $c_{u_{2_{id}}}$, wenn t/L gegeben ist.

[1] Selbstverständlich umfaßt das symbolisch geschriebene Argument außer dem Anstellwinkel $\beta_\infty - \beta_{p0}$ die Gitterparameter, die Profilparameter und die Reynolsche Zahl, womit der umfangreiche Fragenkomplex der Bestimmung des Gleitwinkels im Gitterverband nur angedeutet ist. Näheres darüber findet man in dem Aufsatz von *H. Schlichting* und *N. Scholz*, Ing.-Arch. 19 (1951) S. 42.

Um den Werkstoff auszunützen, wird man bei der innersten Teilturbine zweckmäßig den durch die Ablösung bestimmten, größten Auftriebsbeiwert c_a vorschreiben, also t/L gemäß Fall I bestimmen. Bei der mittleren Teilturbine wird man zweckmäßig die der Leitradstellung zunächst annähernd unterlegte drallfreie Laufradabströmung ($c_{u_2} = 0$) an Hand des Falles II präzisieren.

Mit der so bestimmten Flügellänge vom inneren und mittleren Flügelschnitt ist wegen der erwünschten stetigen Flügelumrandung das Teilungsverhältnis t/L für die übrigen Flügelschnitte vorgeschrieben. Bei diesen ist also nach obigem Fall III vorzugehen. Zur rationellen Lösung kann man sich dabei des folgenden Näherungsverfahrens aus dem Abschnitt 5 bedienen. Hiernach ergibt sich bei vorliegenden Werten β_{p0}, t/L, ζ_{sm}, ζ_{su}, α_1 und einem zunächst geschätzten Gleitwinkel ε die bezogene Meridiangeschwindigkeit $c_{m_{id}}$ von einer Teilturbine aus (46) und (47). Im vorliegenden Fall ist α_1 und $c_{m_{id}}$ vom Leitapparat her vorgegeben, das Teilungsverhältnis t/L ist unbekannt. Zu seiner Bestimmung wird man an Hand von (46) und (47) für einige Werte von t/L die bezogene Meridiangeschwindigkeit $c_{m_{id}}$ berechnen und über t/L aufzeichnen, um dann graphisch jenen Wert t/L zu erhalten, bei welchen $c_{m_{id}}$ dem vom Leitapparat vorgegebenen Wert entspricht.

Für den Profiltropfen wählt man zweckmäßig die Profildicke s wie folgt in Abhängigkeit von der von der Flügelnase aus zählenden Skelettkoordinate ξ

$$s = s_{max}\left(p^{-\frac{p}{p-1}} - p^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{-1}\left[\left(\frac{\xi}{a\,L}\right)^p - \frac{\xi}{a\,L}\right]. \tag{80}$$

Dabei folgt die maximale Flügelstärke eines Flügelschnittes s_{max} aus der Beanspruchung des Flügels. Da die Austrittskante in Praxis keine Schneide haben kann, ist $a = 1{,}03 - 1{,}1$ zu wählen; p hat man bei den üblichen Profilen im Durchschnitt mit etwa 0,5 anzusetzen. Die mit (80) beschriebene Profilform enthält nicht die Eintrittskantenform. Diese ist entsprechend der Fußnote von Abschnitt 4 mit Rücksicht auf die Eintrittskantenkavitation auszubilden. Aus β_{p0}, t/L und dem Profil kann man mit der Näherung $\beta_{p0} = \beta$ an Hand der im Abschnitt 4 beschriebenen Methode denjenigen Verlauf des Flügelskeletts berechnen, der einen konstanten Druck auf der Saugseite sichert. Für das somit festliegende Profil kann nach Abschnitt 3 von der durch β_{p0} gekennzeichneten auftriebslosen Richtung auf die Richtung der Skelettsehne gegenüber der Gitterachse geschlossen werden.

c) Die Verträglichkeitsbedingung für die Strömung von Laufrad und Saugrohr. Es werde angenommen, daß für die Flüssigkeitsteilchen im Unterwasserbehälter die spezifische Strömungsenergie $H = \frac{c^2}{2g} + h + \frac{p}{\gamma}$ konstant sei. Setzt man diese willkürlich gleich Null und überträgt man den Energiesatz für die wirkliche Rohrströmung auf einen Stromfaden im Saugrohr, dann entspricht die spezifische Strömungsenergie am Laufradaustrittsquerschnitt H_2 der zu $\zeta_{sm}\frac{c_{m_2}^2}{2g} + \zeta_{su}\frac{c_{u_2}^2}{2g}$ angenommenen Verlusthöhe der Strömung innerhalb des Saugrohres. Nimmt man weiter an, daß H_2 annähernd der *Euler*schen Gleichung in der Form

$$\text{grad}\, H_2 = \frac{1}{g}\,[\mathfrak{c}_2, \text{rot}\, \mathfrak{c}_2]$$

genüge, und daß der Gradient von H_2 keine axiale[1] und tangentiale Komponente besitze, dann läßt sich zeigen, daß auch seine radiale Komponente verschwinden muß, daß also über den Laufradaustrittsquerschnitt der Zusammenhang

$$\zeta_{sm}\frac{c_{m_2}^2}{2g} + \zeta_{su}\frac{c_{u_2}^2}{2g} = \text{konst.} \tag{81}$$

gilt.

Die Verträglichkeitsbedingung (81) schreibt bei gegebenen Werten von ζ_{su} und ζ_{sm}, der mit den obigen Annahmen aus $c_{m_{2_{id}}} = c_{m_{id}}$ bekannten Meridiangeschwindigkeit und bei der willkürlich gewählten Umfangskomponente c_{u_2} eines Flügelschnittes diesen Wert für alle übrigen Flügelschnitte vor, so daß man hierbei nach dem in Abschnitt 7b) beschriebenen Fall II zu verfahren

[1] Ein Verschwinden der axialen Komponente von grad H kann natürlich nur annähernd vorliegen, da H_2 längs des Saugrohres um $\zeta_{sm}\,(c_{m_2}^2/2g) + \zeta_{su}\,(c_{u_2}^2/2g)$ abnimmt.

hätte. Dabei ist zu bedenken, daß bei gegebenem $c_{u_{1_{id}}}$ und u_{id} wegen der Hauptgleichung (79) mit $c_{u_{2_{id}}}$ auch der hydraulische Wirkungsgrad η_h bestimmt ist. Liegt nun η_h bei einzelnen Flügelschnitten auf Grund der Berechnung außerhalb vernünftiger Grenzen, dann sind Stellung oder Form des Leitapparates so zu ändern, daß $c_{u_{1_{id}}}$ und $c_{m_{id}}$ in Verbindung mit (81) und (79) zu tragbaren Werten von η_h führen.

8. Näherungsmethoden zur Berücksichtigung der Einflüsse bei dreidimensionaler Laufradströmung. a) Modell für die gebundenen Wirbel der Restflügel[1] bei ruhendem Laufrad. Es werde angenommen, daß sich die Zirkulation um einen Laufradflügel in Richtung des Halbmessers nicht ändere und daß die Induktionen der von den Flügelenden ausgehenden freien Wirbel bei den üblichen kleinen Laufradspaltweiten infolge der spiegelbildlich zu den Randstromflächen zu denkenden, entgegengesetzt drehenden Wirbelfäden zumindesten für die maßgebenden, vom Spalt entfernten Aufpunkte verschwinden, die freien Wirbel also vernachlässigt werden können. Setzt man weiter eine Zuströmung von konstantem Drall längs des Halbmessers und drallfreie Abströmung voraus, dann kann man einen beliebigen gebundenen Wirbelfaden, wegen dessen Quellenlosigkeit, vor dem Laufrad längs der Turbinenachse fortsetzen, wobei diese Fortsetzung aller gebundenen Wirbel den vorausgesetzten Eintrittsdrall erzeugt. Innerhalb des Laufrades schließt sich an diesen axialen Teil eines gebundenen Wirbelfadens ein die Naben- und Außenmantelfläche normal durchdringender bis ins Unendliche reichender Teil an, der von dort aus wegen seiner Quellenlosigkeit wieder im Unendlichen vor dem Laufrad auf die Turbinenachse zu verlaufen muß. Der ins Endliche reichende Teil dieses Modells von einem gebundenen Wirbelfaden besteht also aus zwei unendlich langen geradlinigen Schenkeln, von denen einer vom Unendlichen vor dem Laufrad kommend bis zum Laufrad mit der Turbinenachse zusammenfällt und der andere hierzu um den Winkel $(\pi/2) - \nu$ geneigt ist.

Die Induktion des axialen Wirbelteils, welche dem konstant angenommenen Eintrittsdrall gleichkommt, wird beim Entwurf des für sich betrachteten Flügelschnittes durch dessen mit $c_{u_1} t$ vorgegebene Zirkulation berücksichtigt. Will man die räumliche Anordnung der gebundenen Wirbel in erster Näherung berücksichtigen, dann hat man nach dem Vorgang von *Betz*[2] das Skelett dieses für sich betrachteten Flügelschnittes infolge der Induktionen der Restflügel zu verzerren, damit die aus den Geschwindigkeitsdreiecken folgende Zirkulation für einen Flügelschnitt erhalten

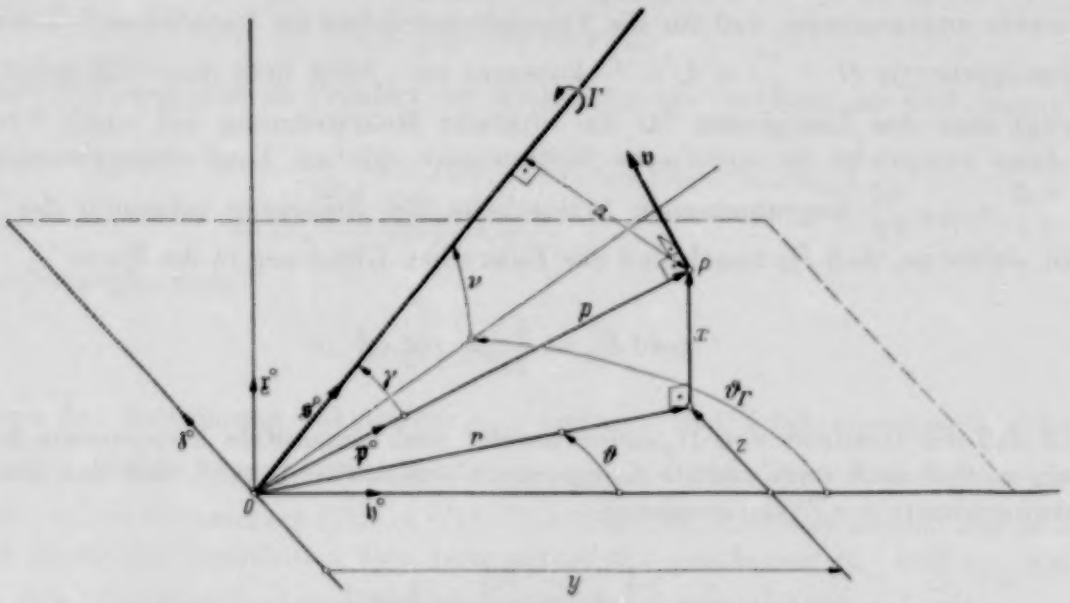

Abb. 9. Zur Induktion eines vom Punkt 0 ausgehenden geraden Wirbelfadens der Zirkulation Γ, welcher um den Winkel ν gegen eine zur Turbinenachse senkrechte z-y-Ebene geneigt ist.

bleibt. Dabei werde in erster Näherung ein beliebiger Restflügel durch einen um $\pi/2 - \nu$ gegen die Turbinenachse geneigten Stabwirbel ersetzt, welcher in einer Axialebene verlaufe, die den Schwerpunkten der Zirkulation von den Zylinderschnitten des Flügels möglichst benachbart ist. Es

[1] Unter „Restflügel„ seien alle Flügel verstanden mit Ausnahme desjenigen, der den Aufpunkt enthält.
[2] Siehe die Arbeit von *Betz* in Fußnote 5 auf Seite 1.

interessieren daher nur die Induktionen eines derartigen zur Turbinenachse geneigten geraden Wirbelfadens.

Auf Grund des *Biot-Savart*schen Gesetzes induziert der in Abb. 9 dargestellte von 0 ins Unendliche gehende, gerade Wirbelfaden von der Zirkulation Γ, dessen Richtung durch den Einheitsvektor

$$\mathfrak{s}^\circ = \mathfrak{x}^\circ \sin\nu + \mathfrak{y}^\circ \cos\nu \cos\vartheta_\Gamma + \mathfrak{z}^\circ \cos\nu \sin\vartheta_\Gamma \tag{82}$$

bestimmt ist (wobei $\mathfrak{x}^\circ, \mathfrak{y}^\circ, \mathfrak{z}^\circ$ die Einheitsvektoren in x, y und z-Richtung darstellen) im Punkt P (x, $y = r\cos\vartheta$, $z = r\sin\vartheta$) die Geschwindigkeit

$$\mathfrak{v} = \frac{\Gamma}{4\pi a} \frac{1+\cos\gamma}{\sin\gamma} [\mathfrak{p}^\circ, \mathfrak{s}^\circ]\,. \tag{83}$$

Dabei ist $\mathfrak{p}^\circ$ der Einheitsvektor der Strecke O—P

$$\mathfrak{p}^\circ = \mathfrak{x}^\circ \frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}} + \mathfrak{y}^\circ \frac{r\cos\vartheta}{\sqrt{x^2+r^2}} + \mathfrak{z}^\circ \frac{r\sin\vartheta}{\sqrt{x^2+r^2}}\,, \tag{84}$$

a der Abstand des Punktes P von dem geraden Wirbelfaden

$$a = p\sin\gamma = |[\mathfrak{p}, \mathfrak{s}^\circ]| \tag{85}$$

und γ der von den Einheitsvektoren $\mathfrak{p}^\circ$ und $\mathfrak{s}^\circ$ eingeschlossene Winkel

$$\gamma = \arccos(\mathfrak{p}^\circ, \mathfrak{s}^\circ)\,. \tag{86}$$

Stellt man das Vektorprodukt auf der rechten Seite von (83) in Komponenten dar und setzt aus v_y und v_z nach bekannten Transformationstegeln die radiale Komponente v_r und die Umfangskomponente v_u zusammen, dann bekommt man mit den Abkürzungen $\Delta\vartheta = \vartheta_\Gamma - \vartheta$ und $\xi = x/r$ die folgende axiale, tangentiale und radiale Komponente von $\mathfrak{v}$:

$$v_x = \frac{\Gamma}{4\pi r} \frac{\cos\nu\sin\Delta\vartheta}{\sin^2\Delta\vartheta + (\sin\nu\cos\Delta\vartheta - \xi\cos\nu)^2} \left(1 + \frac{\xi\sin\nu + \cos\Delta\vartheta\cos\nu}{\sqrt{1+\xi^2}}\right), \tag{87}$$

$$v_u = \frac{\Gamma}{4\pi r} \frac{\xi\cos\nu\cos\Delta\vartheta - \sin\nu}{\sin^2\Delta\vartheta + (\sin\nu\cos\Delta\vartheta - \xi\cos\nu)^2} \left(1 + \frac{\xi\sin\nu + \cos\Delta\vartheta\cos\nu}{\sqrt{1+\xi^2}}\right), \tag{88}$$

$$v_r = -\frac{\Gamma}{4\pi r} \frac{\xi\cos\nu\sin\Delta\vartheta}{\sin^2\Delta\vartheta + (\sin\nu\cos\Delta\vartheta - \xi\cos\nu)^2} \left(1 + \frac{\xi\sin\nu + \cos\Delta\vartheta\cos\nu}{\sqrt{1+\xi^2}}\right). \tag{89}$$

Die räumliche Anordnung der gebundenen Wirbel kann man beim Flügelentwurf so berücksichtigen, daß man für die vorgeschriebene Zirkulation $\Gamma = \Delta c_u\, t$ und eine vorgeschriebene Druckverteilung auf der Saugseite zunächst ein Einzelprofil entwirft, dessen Eigenschaften im räumlichen Gitterverband erhalten bleiben, wenn man nach dem Vorgang von *Betz* seine Skelettelemente in Abhängigkeit von den Induktionen der „Restflügel" am Ort des betrachteten Skeletts verzerrt. Dabei genügt es in erster Annäherung, wenn man die Skelettelemente um den Winkel $\Delta\beta_\infty$ dreht, um welchen sich das Element einer Stromlinie am Ort des betrachteten Flügels bei Überlagerung der Induktionen der Restflügel dreht.

Sind v_{u_R} und v_{x_R} als Induktionen der Restflügel in tangentialer und axialer Richtung klein gegen w_∞, dann ist

$$\Delta\beta_\infty = -\frac{v_{u_R}}{w_\infty}\sin\beta_\infty + \frac{v_{x_R}}{w_\infty}\cos\beta_\infty \tag{90}$$

die Drehung eines Skelettelements im Zylinderschnitt. Dabei sind die Induktionen des Restgitters an einem Aufpunkt des betrachteten Flügels gegeben durch

$$v_{x_R} = \frac{\Gamma}{4\pi r} F_x(\nu, z, \xi, \vartheta)\,, \qquad v_{u_R} = \frac{\Gamma}{4\pi r} F_u(\nu, z, \xi, \vartheta)\,, \qquad v_{r_R} = \frac{\Gamma}{4\pi r} F_r(\nu, z, \xi, \vartheta)\,. \tag{91}$$

Hierin folgen die Einflußfunktionen F aus (87), (88) und (89), wenn man den Längenwinkel des n-ten Nachbarwirbels ϑ_r mit $2\pi/z\,n$ ansetzt und für jede Komponente der Induktionen die Anteile der $z-1$ Flügel des Restgitters in nachstehender Weise summiert zu[1]

$$F_x(\nu, z, \xi, \vartheta) = \sum_{n=1}^{z-1} \frac{\cos\nu \sin\left(\frac{2\pi}{z} n - \vartheta\right)}{\sin^2\left(\frac{2\pi}{z} n - \vartheta\right) + \left[\sin\nu \cos\left(\frac{2\pi}{z} \cdot n - \vartheta\right) - \xi\cos\nu\right]^2} \times \left[1 + \frac{\xi\sin\nu + \cos\nu\cos\left(\frac{2\pi n}{z} - \vartheta\right)}{\sqrt{1+\xi^2}}\right], \tag{92}$$

$$F_u(\nu, z, \xi, \vartheta) = \sum_{n=1}^{z-1} \frac{\xi\cos\nu\cos\left(\frac{2\pi n}{z} - \vartheta\right) - \sin\nu}{\sin^2\left(\frac{2\pi n}{z} - \vartheta\right) + \left[\sin\nu\cos\left(\frac{2\pi n}{z} - \vartheta\right) - \xi\cos\nu\right]^2} \times \left[1 + \frac{\xi\sin\nu + \cos\nu\cos\left(\frac{2\pi n}{z} - \vartheta\right)}{\sqrt{1+\xi^2}}\right], \tag{93}$$

$$F_r(\nu, z, \xi, \vartheta) = -\sum_{n=1}^{z-1} \frac{\xi\cos\nu\sin\left(\frac{2\pi n}{z} - \vartheta\right)}{\sin^2\left(\frac{2\pi n}{z} - \vartheta\right) + \left[\sin\nu\cos\left(\frac{2\pi n}{z} - \vartheta\right) - \xi\cos\nu\right]^2} \times \left[1 + \frac{\xi\sin\nu + \cos\nu\cos\left(\frac{2\pi n}{z} - \vartheta\right)}{\sqrt{1+\xi^2}}\right]. \tag{94}$$

Der Verlauf der Einflußfunktionen $F_x = \text{konst.}$, $F_u = \text{konst.}$ und $F_r = \text{konst.}$ ist für $z = 4$ und $z = 6$ Wirbelstrahlen in einer Achsnormalebene und für $z = 4$ Wirbelstrahlen, welche um 20° gegen die Achsnormalebene geneigt sind, in den Abb. 10 bis 18 in einem ϑ, ξ-Koordinatensystem dargestellt.

Auf diese Weise kann man für einen zunächst als Einzelskelett von bestimmter Zirkulation entworfenen Zylinderschnitt vom Radius $r = 1$, die gemäß (90) für die Drehung eines Skelettelements erforderlichen Induktionen der räumlich angeordneten Restflügel sofort abgreifen.

b) **Modell für die Wirkung der Rotation des Laufrades bei räumlicher Flügelanordnung.** Die absolute Strömung durch das Laufrad werde wirbelfrei und von konstanter Meridiangeschwindigkeit angenommen. Die betrachtete Relativströmung in einer mit Meridiangeschwindigkeit durch das Laufrad bewegten Achsnormalebene sei stationär. Die Strömung sei außen und innen durch koachsiale Zylinder begrenzt und das Flügelskelett habe die Form einer geraden Schraubenfläche von der Gleichung

$$x = \vartheta\, r\, \mathrm{tg}\,\beta\,, \tag{95}$$

wobei β der Steigungswinkel eines Zylinderschnittes vom Halbmesser r, x die axiale, ϑ die azimutale Koordinate sei und

$$r\,\mathrm{tg}\,\beta = \text{konst.} \tag{96}$$

für alle Zylinderschnitte gelte.

Die radialen Schaufelspuren, sowie Nabe und Mantel begrenzen damit in einer Ebene normal zur Turbinenachse einen ebenen Kreisringausschnitt. Bewegt sich dieser mit $c_m = \text{konst.}$ in axialer Richtung, dann besteht er stets aus denselben Flüssigkeitsteilchen, welche relativ zum Laufrad mit einer in Drehrichtung positiven Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_F = -\frac{c_m}{r}\,\mathrm{ctg}\,\beta = -(1-\zeta)\,\frac{u}{r} = -(1-\zeta)\,\omega \tag{97}$$

[1] Die Auswertung der Gleichungen (92) bis (94) wurde im Rahmen einer Diplomarbeit an der Fakultät für Maschinenwesen und Elektrotechnik der T.H. München von Herrn *Hansen* besorgt.

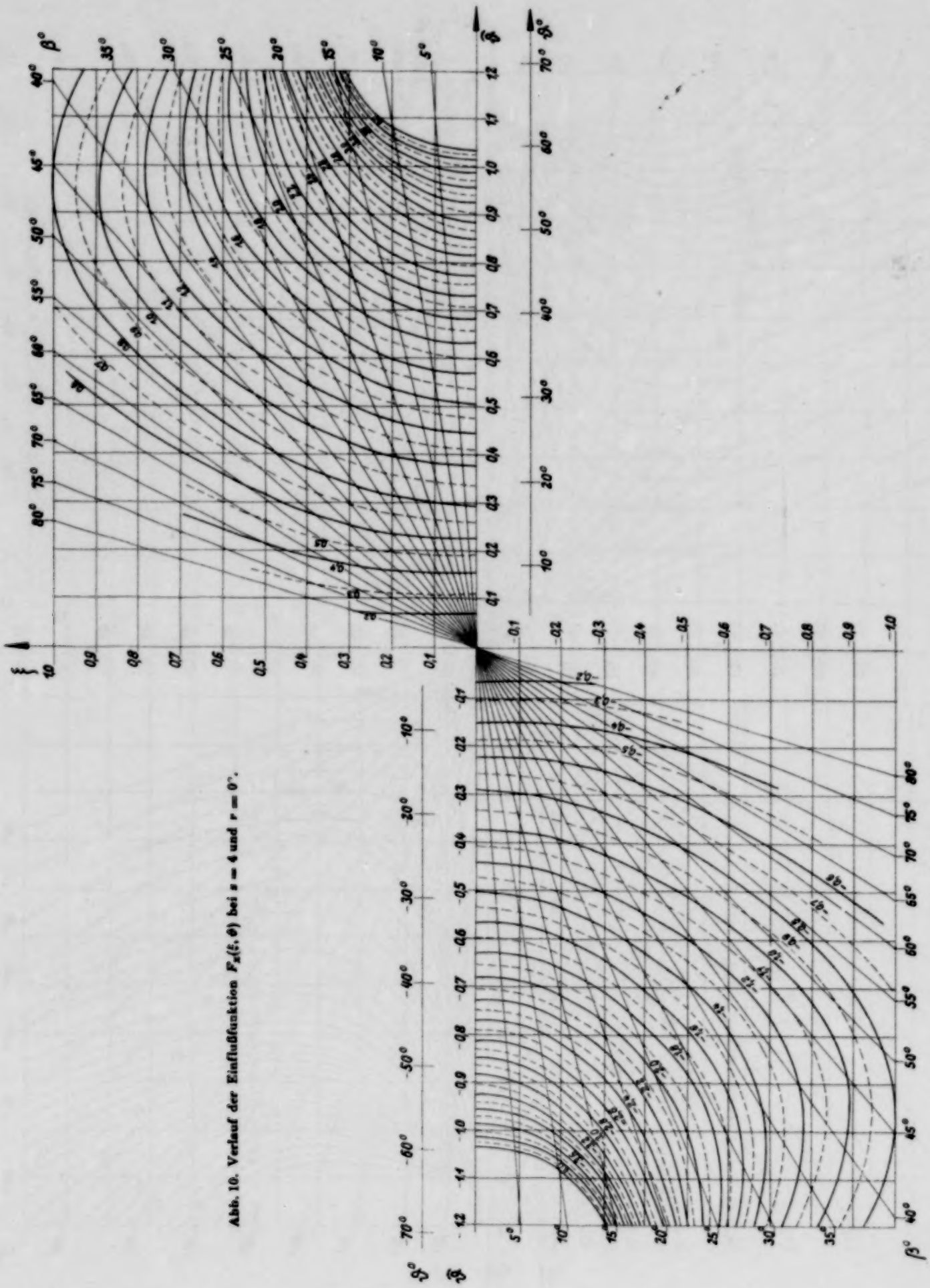

Abb. 10. Verlauf der Einflußfunktion $F_x(\xi, \vartheta)$ bei $s = 4$ und $r = 0°$.

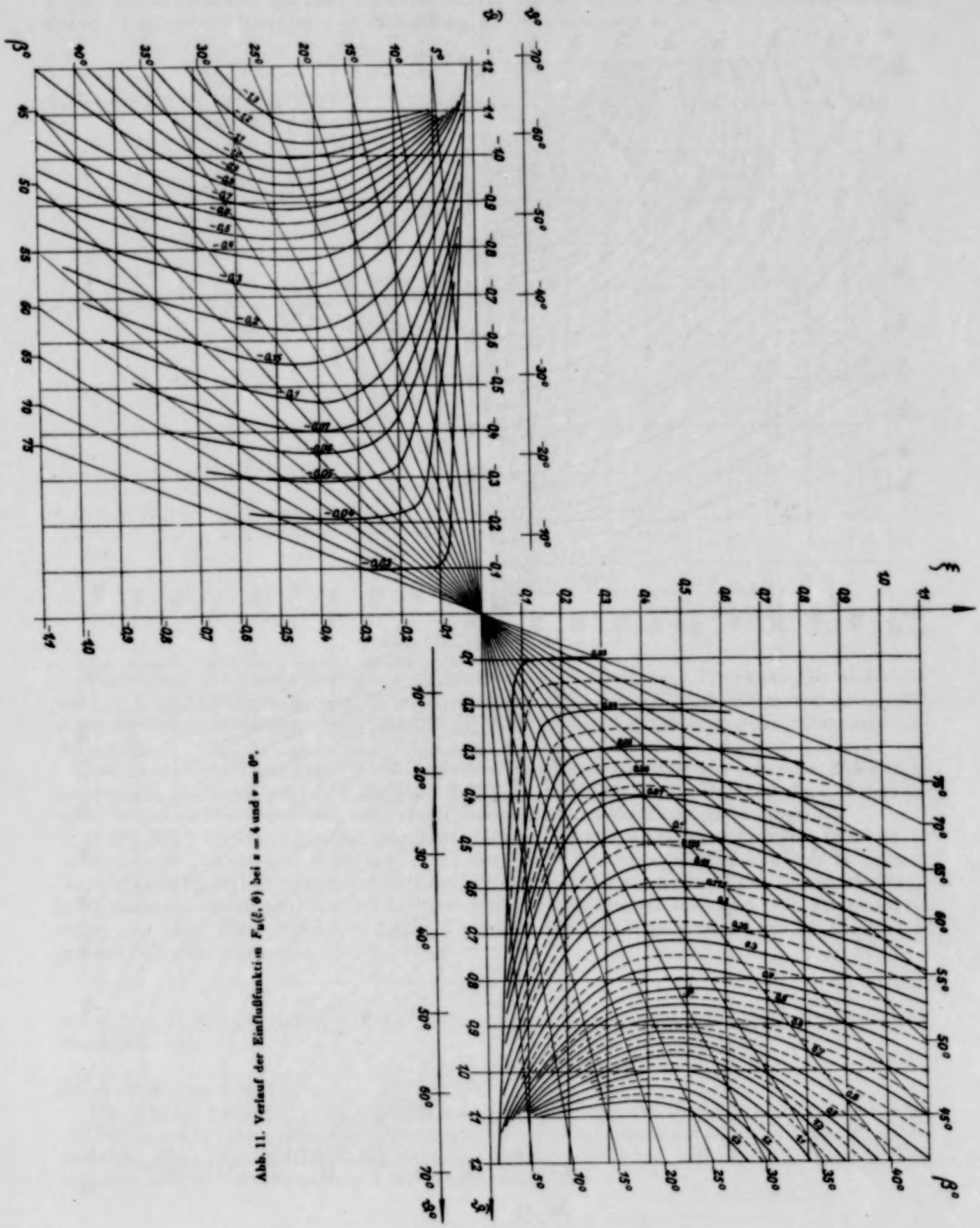

Abb. 11. Verlauf der Einflußfunktion $F_{\beta}(\xi, \Theta)$ bei $s = 4$ und $\tau = 0°$.

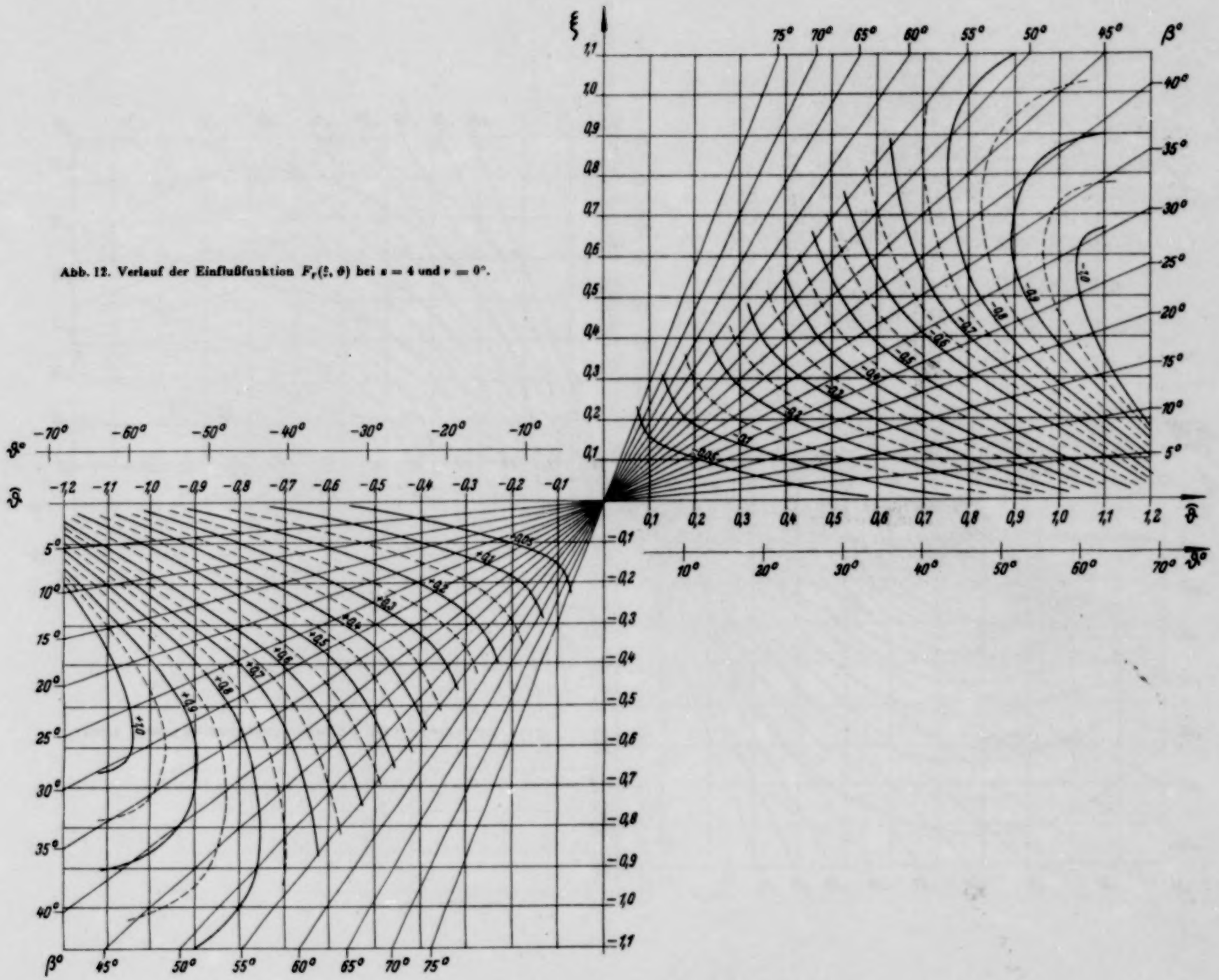

Abb. 12. Verlauf der Einflußfunktion $F_r(\xi, \vartheta)$ bei $s = 4$ und $r = 0°$.

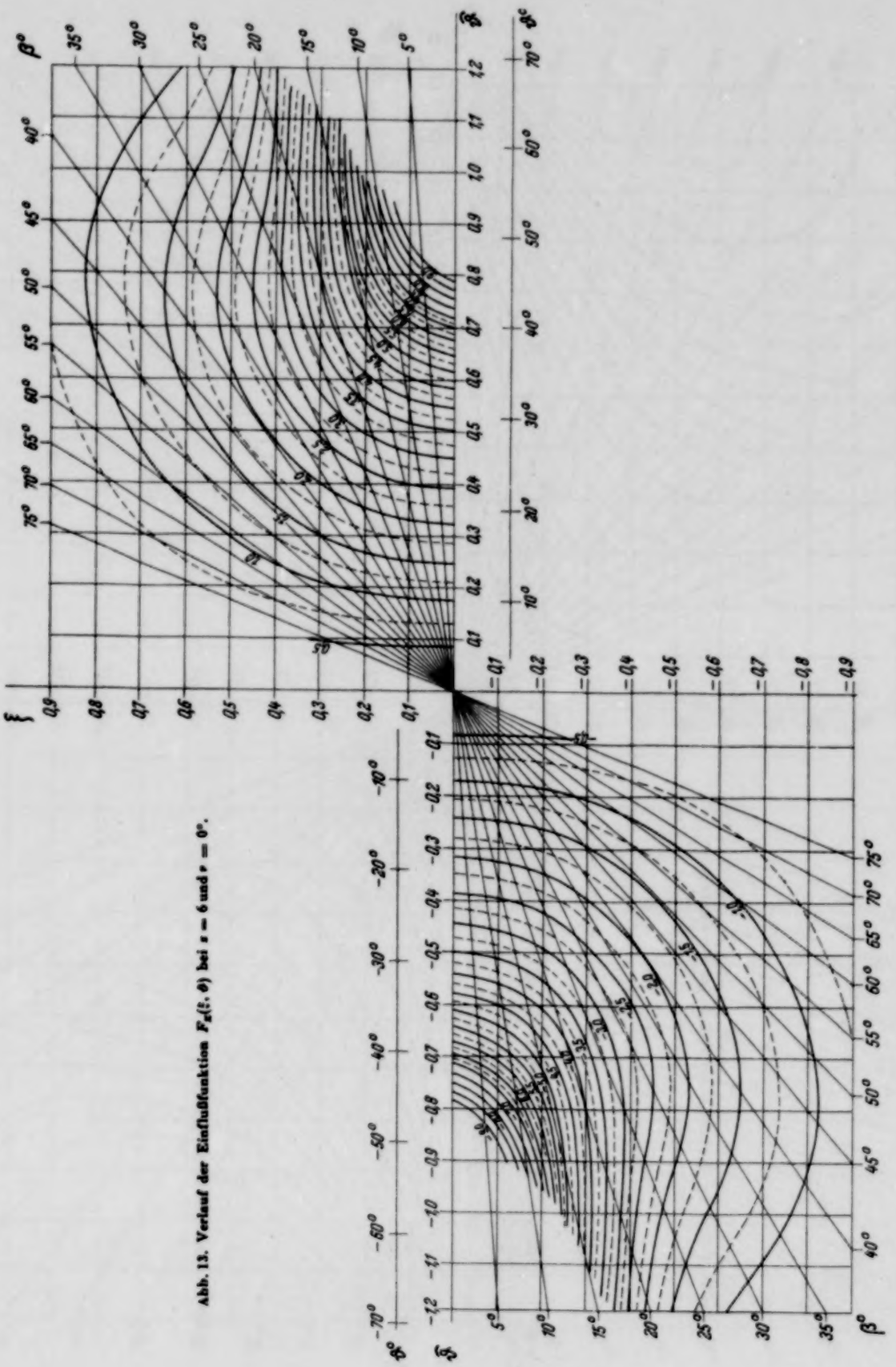

Abb. 13. Verlauf der Einflußfunktion $F_2(\xi, \vartheta)$ bei $s = 6$ und $s = 0°$.

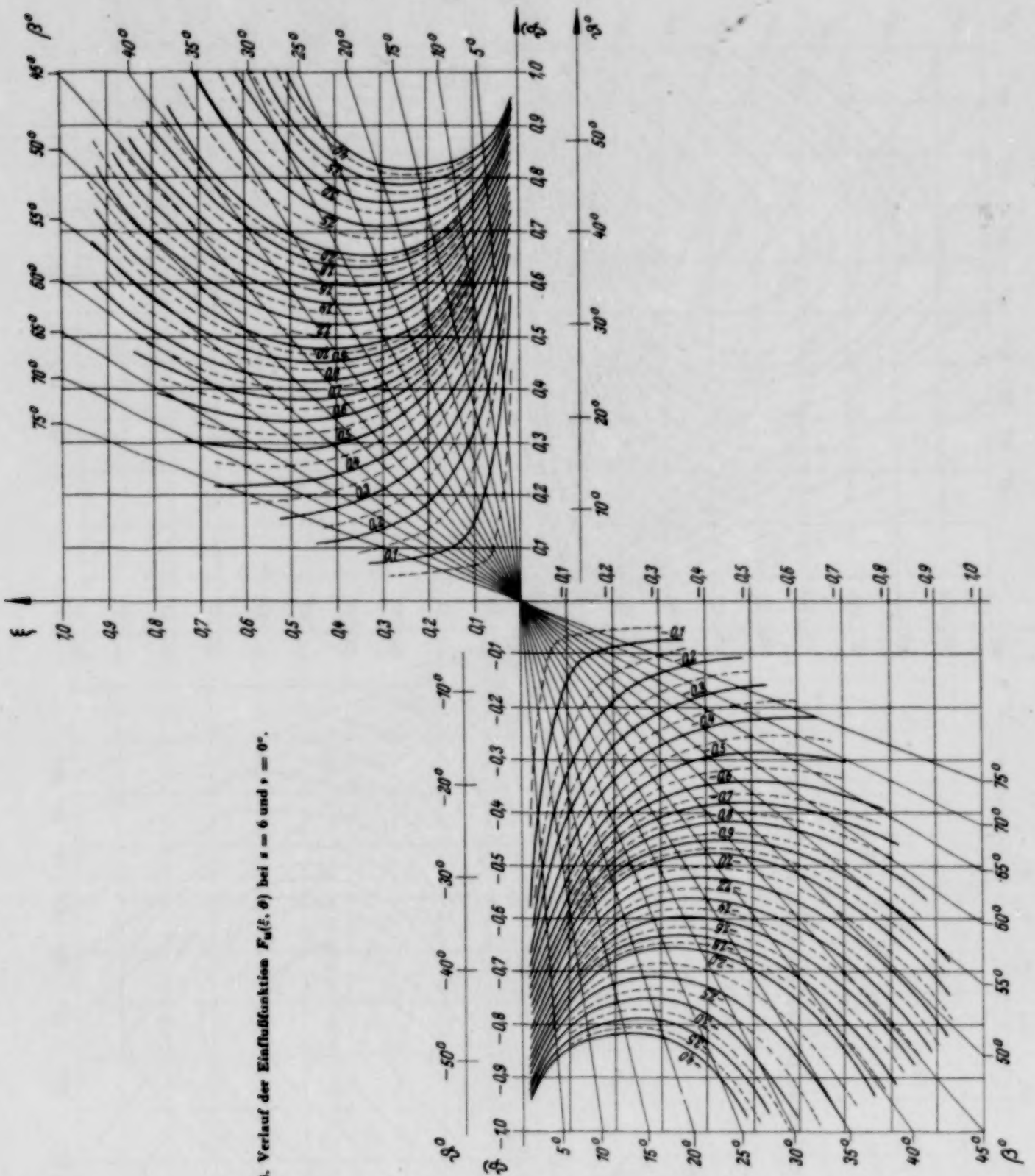

Abb. 14. Verlauf der Einflußfunktion $F_{ik}(\xi, \vartheta)$ bei $s = 6$ und $\varepsilon = 0°$.

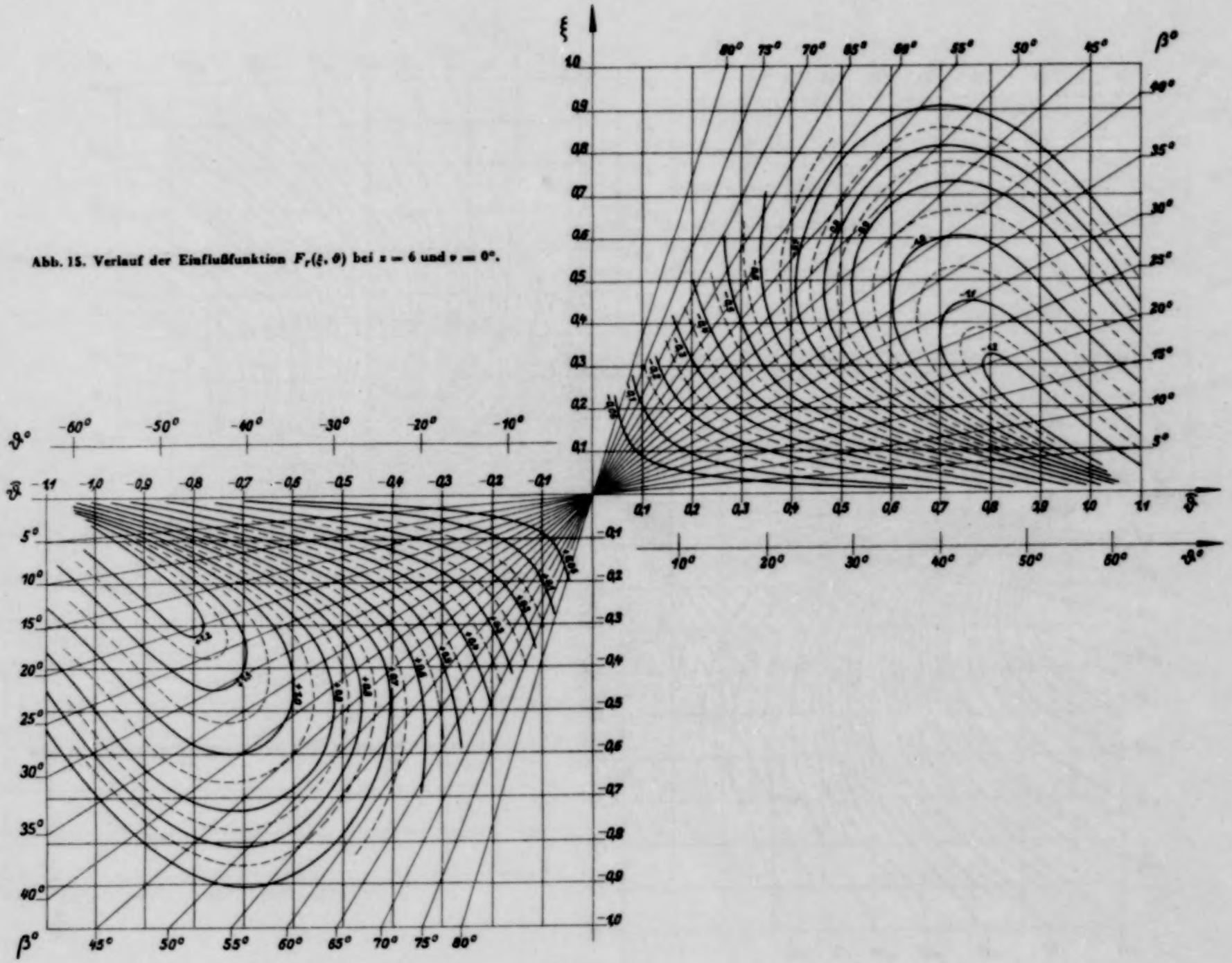

Abb. 15. Verlauf der Einflußfunktion $F_r(\xi, \vartheta)$ bei $z = 6$ und $\nu = 0°$.

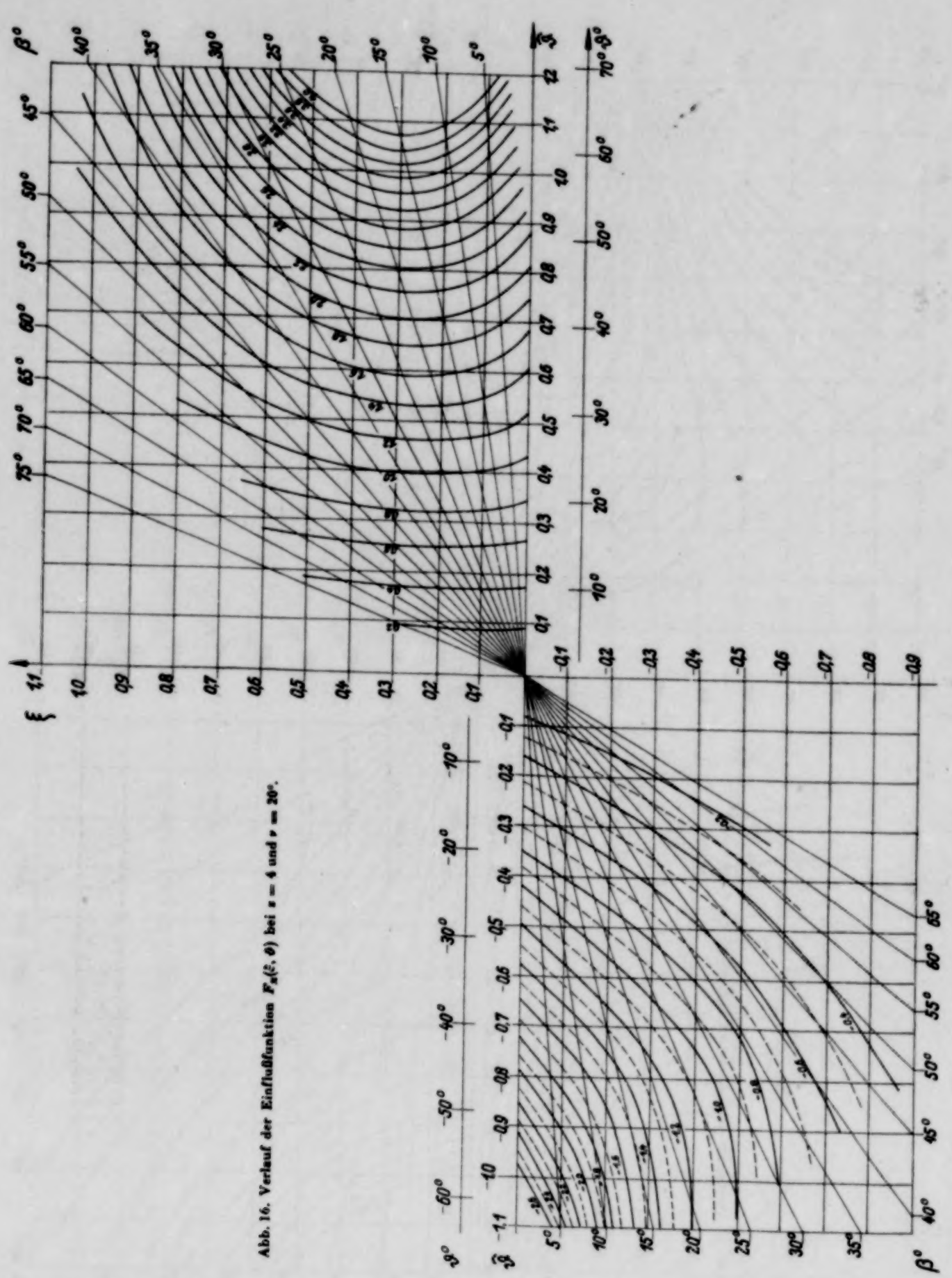

Abb. 16. Verlauf der Einflußfunktion $F_2(\xi, \vartheta)$ bei $s = 4$ und $\tau = 20°$.

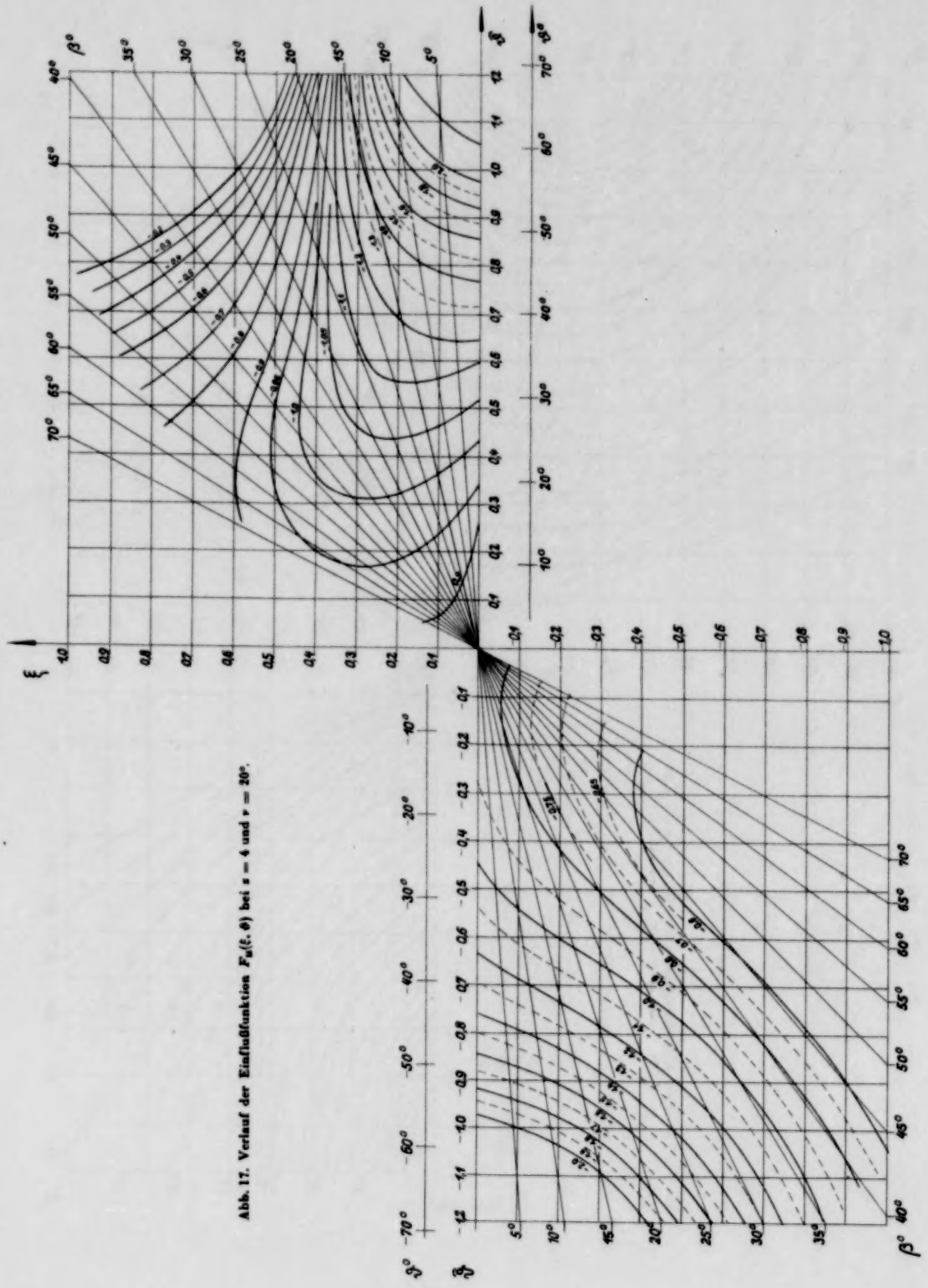

Abb. 17. Verlauf der Einflußfunktion $F_{\mathfrak{A}}(\xi, \vartheta)$ bei $s = 4$ und $\tau = 20°$.

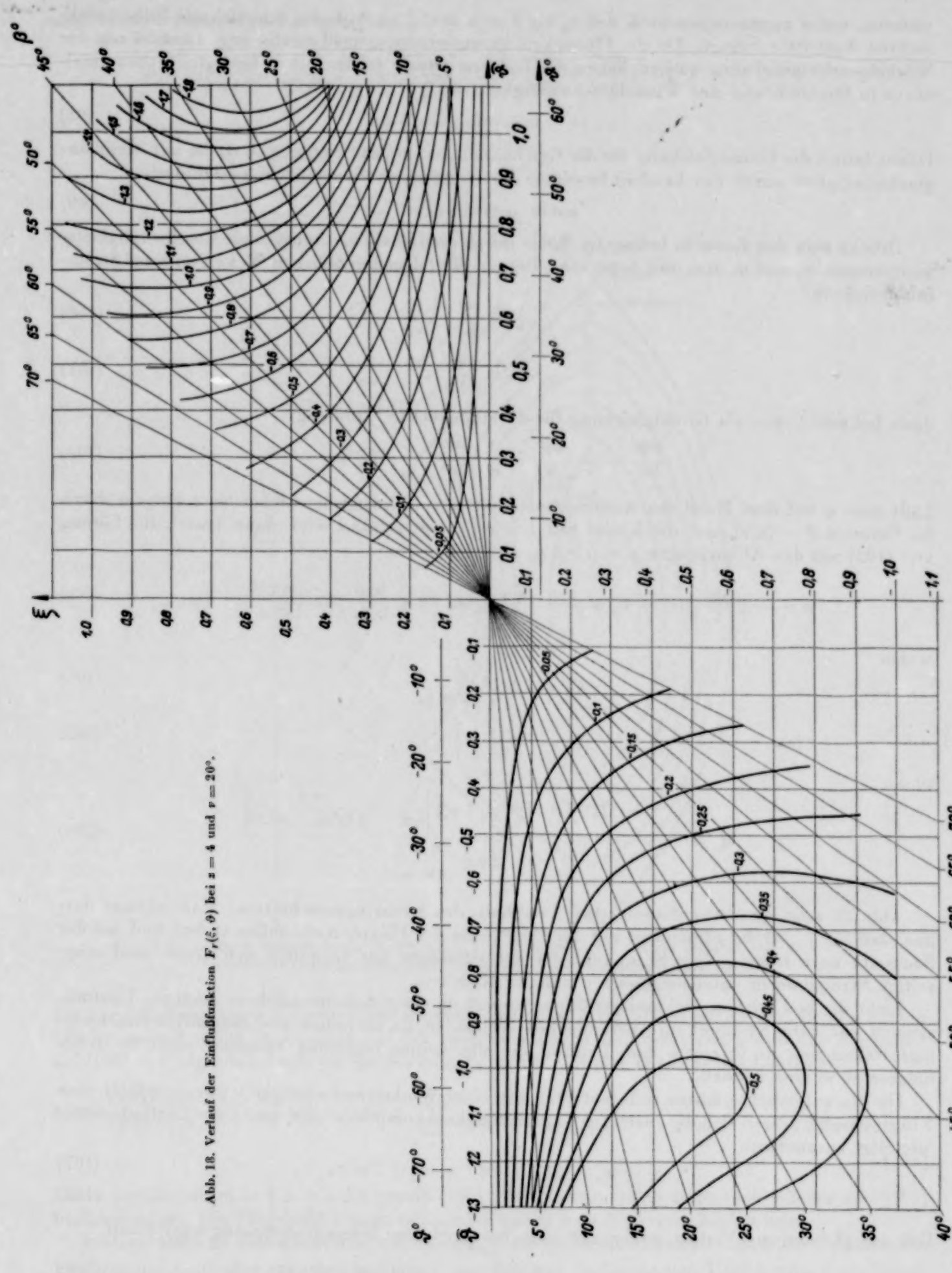

Abb. 18. Verlauf der Einflußfunktion $F_r(\xi, \vartheta)$ bei $s = 4$ und $r = 20°$.

rotieren, wobei angenommen wird, daß $c_m \operatorname{ctg} \beta \neq u$ bzw. $\zeta \neq 0$ ist, die Schaufel also keinen senkrechten Austritt erzwingt. Da die Flüssigkeit voraussetzungsgemäß relativ zum Laufrad mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotiert, haben die Teilchen relativ zu der mit c_m bewegten Achsnormalebene in Drehrichtung eine Winkelgeschwindigkeit von

$$\omega_e = -\omega - \omega_F = -\zeta\,\omega\,. \tag{98}$$

Damit lautet die Grundgleichung für die Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$ der Strömung in einem mit Meridiangeschwindigkeit durch das Laufrad bewegten Kreisringausschnitt zwischen zwei Flügeln

$$\operatorname{rot} \mathfrak{w} = -2\,\zeta\,\omega\,. \tag{99}$$

Drückt man den Rotor in bekannter Weise durch die radiale und tangentiale Geschwindigkeitskomponente w_u und w_r aus, und leitet man diese in der folgenden üblichen Weise von einer Stromfunktion ψ ab[1]

$$w_u = \frac{\partial \psi}{\partial r}\,, \tag{100}$$

$$w_r = -\frac{\partial \psi}{r\,\partial \vartheta}\,, \tag{101}$$

dann bekommt man als Grundgleichung für die untersuchte Strömung:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \vartheta^2} = -2\,\zeta\,\omega\,. \tag{102}$$

Läßt man ψ auf dem Rand des Kreisringausschnittes verschwinden, welcher bei z Flügeln durch die Geraden $\vartheta = (\pi/z)$ und die Kreise mit $r = r_i$, $r = r_a$ gebildet wird, dann lautet die Lösung von (102) mit den Abkürzungen $\varrho = (r/r_i)$, $\varrho_a = (r_a/r_i)$

$$\psi = -\zeta\,\frac{\omega}{2}\,\varrho^2\,r_i^2 + C_1 \ln \varrho + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(n\,\pi\,\frac{\ln \varrho}{\ln \varrho_a}\right) \mathfrak{Cof}\left(\frac{n\,\pi\,\vartheta}{\ln \varrho_a}\right) + C_2\,, \tag{103}$$

wobei

$$C_1 = \zeta\,\omega\,r_i^2\,\frac{(\varrho_a^2 - 1)}{2 \ln \varrho_a}\,, \tag{104}$$

$$C_2 = \frac{\zeta\,\omega\,r_i^2}{2} \tag{105}$$

und

$$a_n = -\frac{\zeta\,\omega\,r_i^2\,[1 - (-1)^n]\,[1 + \varrho_a^2]\left[\dfrac{1}{n\,\pi} - \dfrac{n\,\pi}{4 \ln^2 \varrho_a + n^2\,\pi^2}\right]}{2\,\mathfrak{Cof}\left(\dfrac{n\,\pi^2}{z \ln \varrho_a}\right)}\,. \tag{106}$$

Abb. 19 zeigt den Stromlinienverlauf innerhalb des Kreisringausschnittes. Man erkennt daraus, daß bei $\zeta > 0$ die Flüssigkeit auf der Druckseite des Flügels nach außen strömt und auf der Saugseite nach innen. Vom Staupunkt der Eintrittskante aus entfernen sich druck- und saugseitige Stromlinie in entgegengesetzter radialer Richtung.

Liegt die beschriebene Sekundärströmung innerhalb einer Achsnormalebene auch am Laufradaustritt vor, dann ist damit ein Energieverlust verbunden, da die radiale und tangentiale Geschwindigkeitskomponente in einem dem Laufrad im allgemeinen folgenden Saugrohr nicht in Druck umgesetzt werden können.

Da die untersuchte Ebene sich laut (97) mit einer Winkelgeschwindigkeit von ω_F relativ zum Flügel bewegt, setzen sich die absoluten Geschwindigkeitskomponenten c_u und c_r am Laufradaustritt wie folgt zusammen:

$$c_u = w_u + (\omega_F + \omega)\,r = w_u + \zeta\,\omega\,r\,, \tag{107}$$

$$c_r = w_r\,. \tag{108}$$

Der auf H bezogene Verlust infolge der oben beschriebenen Sekundärströmung wird damit

$$h = \frac{1}{2\,g\,\pi\,(r_a^2 - r_i^2)\,H} \int\int_{(F)} [(w_u + \zeta\,\omega\,r)^2 + w_r^2]\,dF \tag{109}$$

[1] *H. Lamb*, Lehrbuch der Hydromechanik, Leipzig 1931.

oder, in der Stromfunktion ausgedrückt,

$$h = \frac{1}{2\,g\,\pi\,(r_a^2 - r_i^2)\,H} \int\int_{(F)} \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right)^2 + 2\,\zeta\,\omega\,r\,\frac{\partial \Psi}{\partial r} + \left(\frac{\partial \Psi}{r\,\partial \vartheta}\right)^2 + \zeta^2\,r^2\,\omega^2\right] r\,dr\,d\vartheta\,. \tag{110}$$

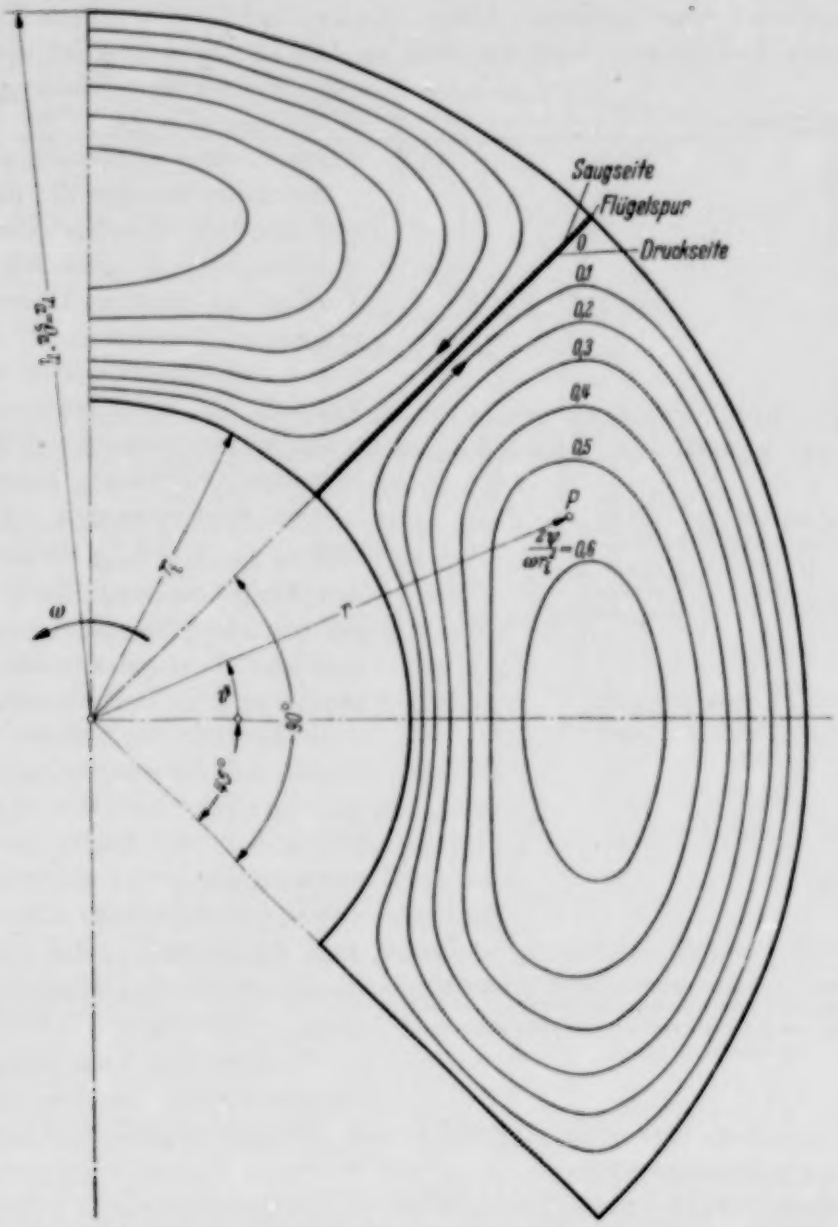

Abb. 19. Relativströmung in einer mit c_m = constans durch das Laufrad bewegten, zur Turbinenachse senkrechten Ebene bei $z = 4$ Flügeln $\zeta > 1$ und einem Nabenverhältnis von 0,45.

Die partielle Integration des ersten und zweiten Gliedes im Integranden nach r und die des dritten Gliedes nach ϑ ergibt im Hinblick auf den verschwindenden Randwert von ψ und mit Rücksicht auf (102) den folgenden Ausdruck für den Energieverlust h infolge Drehung des Laufrades:

$$h = \frac{\zeta^2\,\omega^2\,r_i^2}{4\,g\,H}\left\{\frac{\varrho_a^2 - 1}{\ln \varrho_a} - \frac{8\,z}{\pi}\,(\varrho_a^2 + 1)\ln^2 \varrho_a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{m^2\,\pi^2 + 4\ln^2 \varrho_a}\left[\frac{1}{m\,\pi} - \frac{m\,\pi}{4\ln^2 \varrho_a + m^2\,\pi^2}\right] \mathfrak{Tg}\left(\frac{m\,\pi^2}{z \ln \varrho_a}\right)\right\}. \tag{111}$$

Dabei werden mit $m = 2\,n + 1$ die gemäß (106) allein existierenden ungeraden Glieder von (103) berücksichtigt. Die Flügelzahl z muß selbstverständlich von Null verschieden sein.

Im Gegensatz zu dem annähernd mit $\varepsilon\,(u_{id}/c_{m_{id}})$ anzusetzenden Laufradverlust ist der durch die Drehung des Laufrades entstehende Verlust vom Quadrat der bezogenen Umfangsgeschwindigkeit abhängig.

$$\frac{\omega^2\,r^2}{2\,g\,H} = u_{id}^2\,.$$

Eine einfache geometrische Näherungsbetrachtung zeigt, daß der Beiwert ζ mit der Abweichung vom drallfreien Schaufelaustrittswinkel $\Delta\beta$ wie folgt zusammenhängt:

$$\zeta = \frac{2\,\Delta\beta}{\sin 2\,\beta}\,. \tag{112}$$

9. Versuche an einem in Anlehnung an Abschnitt 7 entworfenen Laufrad. Ein im Auftrag der Firma E. Ruch (Oberkirch) zu entwerfendes 4flügeliges Laufrad für eine offene Kaplanturbine, deren Meridianschnitt durch Leitapparat und Laufrad in Abb. 20 zu sehen ist, bot Gelegenheit, die aufgestellten Berechnungsgrundsätze an einem Modellrad von $D_a = 350$ mm Laufradaußendurchmesser im Versuch zu überprüfen.

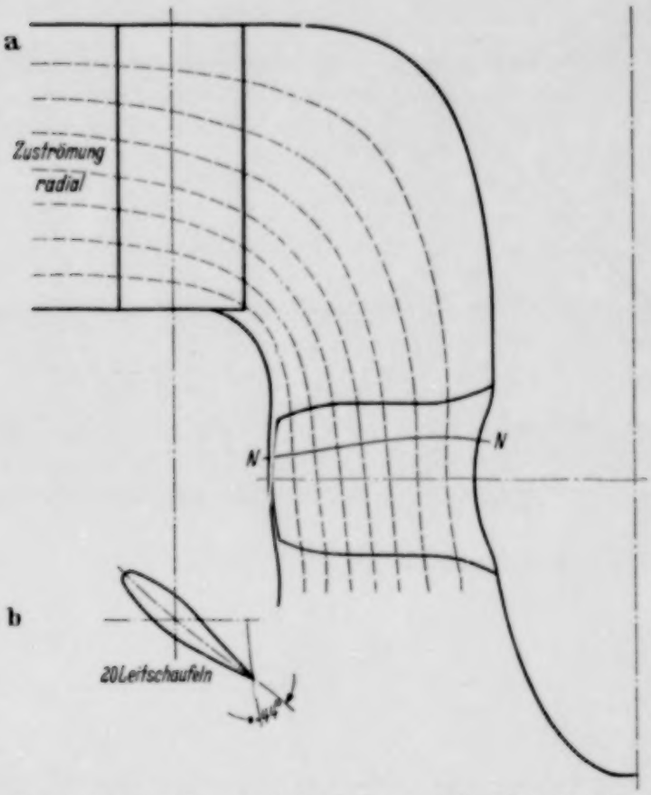

Abb 20. Meridianschnitt durch Leitapparat und Laufraf in Zirkularprojektion mit Meridianstromlinien nach *Strscheletzky* (Lit 5) für radiale Zuströmung zum Leitapparat und die abgebildete Leitschaufelstellung berechnet.

Zunächst wurden für die im Grundriß dargestellte Leitschaufelstellung bei radialer Zuströmung zum Leitrad, wie sie bei einer offenen Turbine in großem Oberwasserbehälter angenommen werden darf, nach dem Vorgang von *Strscheletzky*[1] der in Abb. 20 dargestellte Verlauf der Meridianstromlinien bei einem Gesamtstrom von $Q = 0{,}32$ m³/sec berechnet. Der sich gleichzeitig hiermit ergebende Verlauf der Komponenten der Eintrittsgeschwindigkeit $c_{m_{id}}$ und $c_{u_{1_{id}}}$ entlang der Normalen zu den Meridianstromlinien $n - n$ ist in Tabelle 3 für die drei betrachteten Stromlinien angegeben. Eine durch die in die Strömung hineinragende Leitschaufelkante verursachte steile Zacke in der Geschwindigkeitsverteilung wurde dabei unterdrückt, weil sie im Widerspruch mit der Erfahrung gestanden hätte. Für das Laufrad wurde eine bezogene Umfangsgeschwindigkeit am Außendurchmesser D_a von $u_{id_a} = 1{,}71$ zugrunde gelegt, welche mit dem Gesamtstrom im Entwurfspunkt eine spezifische Drehzahl von etwa $n_s = 600$ U/min ergab.

An dem der Nabe benachbarten Zylinderschnitt i vom Durchmesser $0{,}48 \cdot D_a$ wurde das Teilungsverhältnis t/L so bestimmt, daß bei einem geringen negativen Austrittsdrall der Auftriebsbeiwert nicht zu Ablösungen führte.

Im mittleren Zylinderschnitt m vom Durchmesser $0{,}71 \cdot D_a$ sollte bei der entsprechend gewählten Leitradöffnung und dem zu erwartenden hydraulischen Wirkungsgrad drallfreier Austritt vorliegen.

Am äußeren Zylinderschnitt a^x vom Durchmesser $0{,}94\,D_a$ wurde ein geringer negativer Austrittsdrall vorgesehen, wobei im Teilungsverhältnis auf eine kontinuierliche Umrandung des Flügels zu achten war in Verbindung mit einem festigkeitsmäßig erwünschten Zusammenfall von Profilschwerpunkten und Flügelachse. Der Austrittsdrall in den extremen Zylinderschnitten sollte die Strömung im Saugrohr stabilisieren und durch Herabsetzen von w_∞ in den äußeren Flügelpartien deren Kavitationssicherheit erhöhen. Außerdem konnte hierdurch bei Abweichung vom Konstruktionsgefälle nach oben oder unten für die innere oder äußere Teilturbine ein größerer Wirkungsgrad als üblich erwartet werden und damit ein flacher Verlauf des Gesamtwirkungsgrades über der Fallhöhe.

Die maximale Flügeldicke an der Nabe ergab sich aus der Beanspruchung des Flügelwurzelquerschnittes bei H_{max}. Von hier aus zum Außenrand wurde s_{max} linear über dem Halbmesser auf das technologisch vertretbare Maß vermindert. Die Profiltropfen wurden affin zum Profil Göttingen 398 ausgebildet. Der Neigungswinkel β_{po} der auftriebslosen Anströmrichtung gegen den Umfang wurde nach Abschnitt 7 b) so festgelegt, daß die in Tabelle 3 angegebene Geschwindigkeitsverteilung vor dem Laufrad mit der vom Leitrad her berechneten zusammenstimmte. Hierbei wurde der Saugrohrwirkungsgrad für die Umsetzung der Umfangskomponente $\eta_{s\,u}$ zu Null angenom-

[1] Siehe die Arbeit von *Strscheletzky* in Fußnote 6 auf Seite 1.

men. Der Saugrohrwirkungsgrad zur Umsetzung der Meridiangeschwindigkeit η_{sm} wurde zu 0,8 angesetzt, ein Wert, welcher annähernd durch nachträgliche Messung bestätigt wurde und der teilweise durch wasserbauliche Wünsche bedingt war. Die Steigung m der $c_a(\delta_0)$-Kennlinie wurde

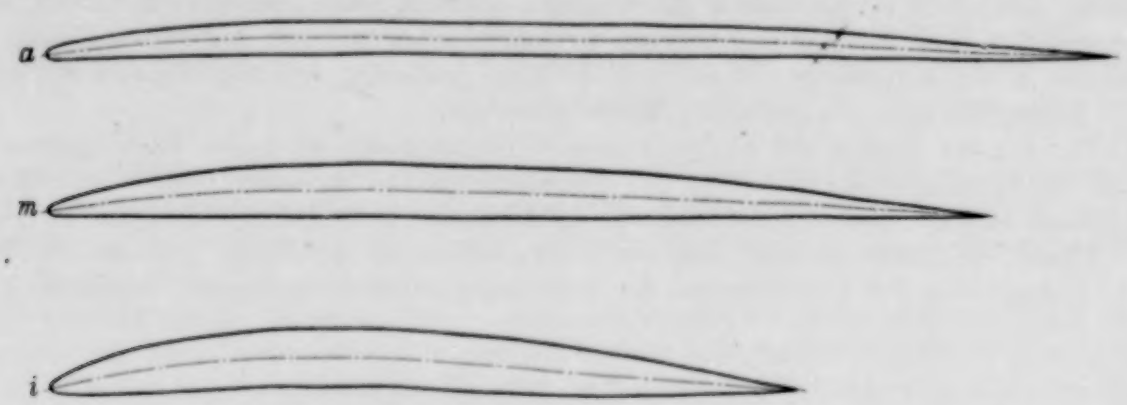

Abb. 21. Zylinderschnitte a, m, i, des Flügels.

aus den auf unendliche Flügelbreite umgerechneten Polaren annähernd ähnlicher Profile zu $m = 4{,}8$ im Mittel angesetzt, wobei für die Profile i und m die der Göttinger Reihen 490 und 491 genommen wurden. Für die Werte β_{p0}, s_{max}, t/L wurde mittels der im Abschnitt 4 behandelten Methode der Verlauf der Skelettlinie für einen konstanten Druck auf der Saugseite festgelegt. Hieraus und aus dem Profiltropfen wurde nach der Methode von *Pantell*[1], ergänzt durch das im Abschnitt 3 angegebene Verfahren von der durch β_{p0} gekennzeichneten auftriebslosen Richtung auf den Staffelungswinkel β geschlossen.

Tabelle 3. *Daten der Zylinderschnitte.*

Zylinderschnitt	i	m	a^x
u_{id}	0,8225	1,215	1,610
η_h	0,88	0,87	0,86
c_{u1id}	0,39	0,34	0,34
$c_{m_{id}}$	0,61	0,54	0,51
L/t	1,07	0,935	0,785
β_{p0} (°)	29,2	21,5	17,5
c_a	1,08	0,61	0,45

Die Entwurfsdaten der so erhaltenen und in Abb. 21 dargestellten Zylinderschnitte sind in Tabelle 3 zusammengefaßt. Dabei ist der hydraulische Wirkungsgrad im Mittel etwa 1% größer als der gemessene Wert angesetzt, um das Verhalten der geplanten Großausführung des Rades zu kennzeichnen. Der für die Berechnung vom Auftriebsbeiwert verwendete Gleitwinkel wurde dem in der Tabelle 3 angegebenen hydraulischen Wirkungsgrad η_h und dem gemessenen Saugrohrwirkungsgrad η_{sm} angepaßt.

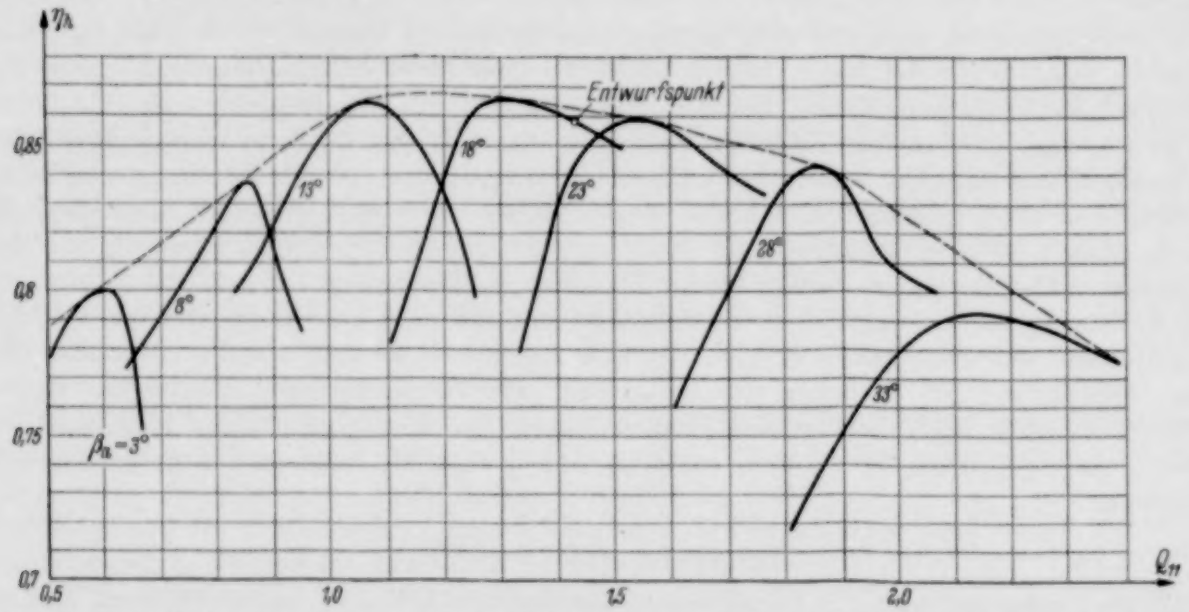

Abb. 22. Hydraulischer Wirkungsgrad η_h über dem Einheitsstrom Q_{11} bei konstanter Flügelstellung β_a im Entwurfspunkt, Einheitsdrehzahl $n_{11} = 145$.

Die Versuche des Modellrades von 350 mm Durchmesser wurden an einem Stand der Technischen Hochschule München durchgeführt, der durch 3,5 m Fallhöhe und etwa 0,90 m³/sec Vollwasserstrom

[1] Siehe die Arbeit von *Pantell* in Fußnote 1 auf Seite 2.

gekennzeichnet ist. Dabei wurde die Turbine in einem Laufradwinkelbereich von etwa 35°, in einem Leitradwinkelbereich von etwa 60° und in einem Drehzahlbereich von 500—1000 U/min abgebremst. Die Fallhöhe wurde durch pneumatische Übertragung mit einem Differenzdruckmanometer, der Gesamtstrom durch die Volumendifferenz eines geeichten Behälters innerhalb einer gemessenen Zeit, die Drehzahl mittels Stichdrehzahlmesser von der Firma Hasler und das Drehmoment an der Kupplung mittels Pendeldynamo gemessen. Das zugehörige Laufradmoment wurde im Schleppversuch mit geeichtem Motor bestimmt.

Abb. 22 zeigt den Verlauf des hydraulischen Wirkungsgrades über dem Einheitsstrom Q_{11} bei der Konstruktionseinheitsdrehzahl n_{11} für verschiedene Laufradstellungen, welche durch den Winkel gekennzeichnet sind, den die Skelettsehne des äußeren Zylinderschnittes mit der Umfangsrichtung einschließt. Man erkennt, daß der Auslegungspunkt mit einem gemessenen Wert[1] von $Q_{11} = 1{,}37$ etwas von der Einhüllenden der Wirkungsgradlinien und deren Maximum abweicht.

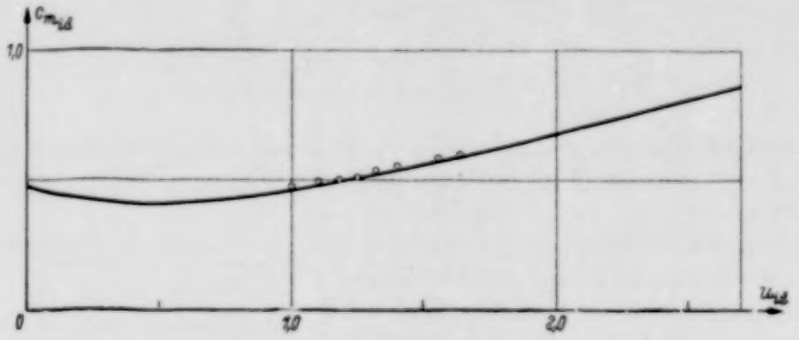

Abb. 23. Vergleich der gemessenen und berechneten $c_{m_{id}}(u_{id})$ Werte.

Um das in Abschnitt **5** beschriebene Verfahren zur Berechnung der $c_{m_{id}}(u_{id})$-Kennlinie einer Teilturbine beurteilen zu können, wurde für den vom Leitapparat her berechneten Winkel α_1 der mittleren Stromfläche die in Abb. 23 dargestellte $c_{m_{id}}(u_{id})$-Linie berechnet. Dieser Linie sind in Abb. 23 die gemessenen Werte des mittleren Stromfadens gegenübergestellt.

10. Zusammenfassung. Es wird angegeben, wie eine aus Leitrad, Übergangsraum, Laufrad und Saugrohr bestehende Kaplanturbine mittels 2-dimensionaler Methoden ausgelegt werden kann, wobei die Verträglichkeit der Strömungsfelder von zwei aufeinanderfolgenden Bauteilen und die kavitationssicherste Druckverteilung auf der Saugseite des Laufradflügels besonders berücksichtigt wird.

Zur Berechnung des Verlaufes vom Gesamtstrom Q über der Drehzahl n wird auf der Grundlage 2-dimensionalen Potentialströmung durch ein Profilgitter für die Teilturbine eine tabellierte, geschlossene Näherungslösung der $c_m(u)$-Linie angegeben.

Weiter werden geschlossene Näherungslösungen mitgeteilt für die Form eines Flügelskeletts im Gitterverband von dünnen Profilen bei konstantem saugseitigen Druck, für die Geschwindigkeitsverteilung hinter dem Leitrad und hinter dem Laufrad bei wirbelbehafteter Strömung, für das 3-dimensionale Geschwindigkeitsfeld der Restflügel bei räumlicher Flügelanordnung und für den Stromlinienverlauf sowie den Verlust infolge Drehung des Laufrades.

In Anlehnung an die angeführte Berechnungsmethode wird eine Modellturbine von 350 mm Laufraddurchmesser und etwa 13 PS mittlerer Leistung gebaut und auf dem Prüfstand des Hydraulischen Instituts der TH München durchgemessen. Das Wirkungsgradoptimum des Rades von $\eta_h \approx 0{,}87$ weicht geringfügig von den Entwurfsdaten ab. Der gemessene Verlauf des Gesamtstromes Q über der Drehzahl n weicht etwa 5% von der für die mittlere Teilturbine berechneten Kennlinie ab.

(Eingegangen am 24. März 1958.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *J. Raabe*, Privatdozent der Technischen Hochschule München, Torkenweiler bei Ravensburg, Tettnanger Str. 43.

[1] Die Turbine war für einen Einheitsgesamtstrom von $Q_{11} = 1{,}43$ ausgelegt worden.

Die Eigenfrequenzen und Schwingungsformen von Turbomaschinen

Von B. Jäger

1. Zweck der Untersuchung. Die vorliegende Untersuchung ist für die Berechnung von Turbo-Triebwerken für Fahrzeuge und Flugzeuge gedacht. Hier interessieren die kritischen Drehzahlen, welche durch die Unwucht des Rotors erregt werden. Die Schwingungsfrequenz entspricht also der ersten Ordnung der Drehzahl.

Die schwingungsmäßige Analyse eines solchen Triebwerks ist in den meisten Fällen etwa die folgende: Im untersten Drehzahlbereich sind Aufhängeschwingungen des elastisch aufgehängten Triebwerks zu erwarten. Dabei kann die Maschine selbst als starr betrachtet werden. Im mittleren Drehzahlbereich ist das Triebwerk überkritisch bezüglich der Aufhängung. Hier treten Schwingungen des ganzen Triebwerks an nicht rotierenden Teilen auf, etwa Biegeschwingungen von auf dem Gehäuse befestigten Teilen. Dagegen dürfen Schwingungen, an denen rotierende Teile mit wesentlichen Verformungen teilnehmen, im Drehzahlbereich der Maschine nicht vorkommen. Bei der geringen Dämpfung würden solche Schwingungen, welche der Biegekritischen einer Welle auf festen Lagern vergleichbar sind, erfahrungsgemäß unzulässig sein.

Da möglichst schon bei der Konzeption einer Maschine eine solche Analyse wenigstens angenähert vorliegen sollte, wird hier gezeigt, wie ein Ersatzsystem aufgestellt und wie das dazu gehörende Gleichungssystem behandelt werden kann, um das Verhalten eines Triebwerkes vorauszusagen.

Im folgenden ist versucht worden, eine Grundlage für die praktische Rechnung zu bieten. Deshalb ist ein möglichst allgemeiner Fall gewählt worden, an dem die Operationen gezeigt werden.

2. Die Einflußzahlen der elastisch gelagerten Welle. Im Schrifttum über Biegeschwingungen ist eine Anzahl von Rechenverfahren beschrieben, welche es erlauben, unter den verschiedensten Gegebenheiten die unterste oder auch noch höhere Eigenschwingungszahlen von Wellen zu berechnen. Diesen Verfahren ist gemeinsam, daß die Welle sich auf steifen Lagern befindet, oder daß eine gewisse Lagerelastizität noch mit berücksichtigt werden kann. Die wesentliche Elastizität des schwingungsfähigen Systems liegt aber in der Biegung der Welle.

Im modernen Maschinenbau, vor allem im Fahrzeug- und Flugzeugbau mit den hohen Drehzahlen und dem immer kleiner werdenden Leistungsgewicht kommt man darauf, die Wellen durch Hohlwellen ja sogar durch Trommelläufer zu ersetzen, bei denen die Berücksichtigung der Biegung außer in den Zapfen und Endscheiben keine wesentlichen Beiträge mehr liefert.

Dagegen ist man bestrebt, die Gehäuse, in denen die rotierenden Teile gelagert sind, immer leichter auszuführen, einerseits aus Gründen der Gewichtsersparnis, andererseits aus strömungstechnischen Gründen. Zum Beispiel will man im Turbomaschinenbau die ringförmigen Durchflußquerschnitte nicht mehr als unbedingt erforderlich durch Arme einschränken. Denkt man sich, etwa im Rahmen eines statischen Versuchs, die Gehäuse in geeigneter Weise in ihrer äußeren Kontur festgehalten und eine Kraft auf dem Läufer angebracht etwa an der Stelle, an der die größte Masse sitzt, so kann man in einem solchen Fall feststellen, daß die Weichheit der Gehäuse einen Beitrag zur Verschiebung des Angriffspunktes der Kraft liefert, der durchaus in der Größenordnung der Verformung des Läufers selbst liegt.

Will man nun für diesen Fall, also unter der Annahme der festgehaltenen Außenkontur der Gehäuse oder unter der Annahme einer unendlich großen Masse in den Außenringen der Gehäuse, das Schwingungsverhalten des Läufers betrachten, so wird man bei der Aufstellung der Einflußzahlen des schwingenden Systems die Verschiebungen, die auf die Elastizität der Gehäuse zurückgehen, den Verschiebungen hinzufügen müssen, die durch die Biegeweichheit des Läufers zustande kommen. Es liegt der Rechnung die Annahme zugrunde, daß alle Elastizitäten eine lineare Charakteristik besitzen. Man kommt auf das Schema für den Läufer von Abb. 1. Dabei gilt folgendes: Punkt *1* und *2* sind fest; Punkt *3* und *4* stellen die Masse der Lager mit einem Teil der Masse der Welle dar; Punkt 5 und *6* stellen die Massen der rotierenden Teile mit Teilen der Wellenmasse dar. Die Federn α_{33} und α_{44} setzen sich aus allen

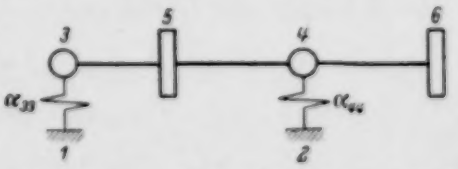

Abb. 1. Biegsame Welle auf elastischen Lagern.

Weichheiten zwischen den Festpunkten *1* und *2* und der Welle zusammen. Man sieht, daß sich die Anzahl der Massen des Systems gegenüber der klassischen Art des Rechnens vergrößert hat, da auch die an den Lagern befindlichen Massen an der Bewegung teilnehmen und in die Rechnung eingeführt werden müssen.

Die Bestimmung der Einflußzahlen zerfällt nun in zwei Rechengänge: In die Ermittlung der Biegeeinflußzahlen des Läufers unter der Annahme steifer Lager und die Ermittlung der Lagereinflußzahlen unter der Annahme, daß der Läufer starr sei.

a) Die Ermittlung der Biege-Einflußzahlen des Läufers unter der Annahme starrer Lager. In den Lagerpunkten soll keine Verschiebung quer zur Rotationsachse des Läufers möglich sein; dagegen sei eine Neigungsänderung der Mittellinie des Läufers zugelassen, da in den Lagern keine Einspannung bestehen soll. Für die Berechnung der Einflußzahlen sei an sich auf das Schrifttum verwiesen; es soll aber des Zusammenhangs wegen ein kurzer Überblick gegeben werden.

Auf einer Welle sollen sich einige scheibenförmige Massen mit der Masse m_i und dem äquatorialen Massenträgheitsmoment Θ_i befinden. Dann greift in der biegekritischen Drehzahl, wenn die Welle also mit der ersten Ordnung der Drehzahl schwingt, in einem Massenpunkt die Fliehkraft

$$F_i = m_i \omega^2 y_i \tag{1}$$

an. Dabei ist y_i die elastische Auslenkung und ω die Winkelgeschwindigkeit der Rotation. Da die Massen scheibenförmig sein sollen, greift in jedem Massenpunkt auch das rückdrehende Kreiselmoment

$$M_i = -\Theta_i \omega^2 \varphi_i \tag{2}$$

an, wobei φ_i die Neigung im Punkt i ist[1].

Die Einflußzahlen sind dem Schrifttum[2] zu entnehmen; es soll hier nur noch folgendes zusammengefaßt werden.

Die Einflußzahlen α_{ik} geben die Verschiebung im Punkt i unter der Einheitskraft im Punkt k an. Dabei gilt der Satz der Reziprokität $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$. Die Einflußzahlen β_{ik} bezeichnen die Neigung der Biegelinie an der Stelle i unter dem Einheitsmoment an der Stelle k, wobei ebenfalls gilt $\beta_{ik} = \beta_{ki}$. Die Einflußzahlen γ_{ik} sind als Neigung im Punkt i unter der Einheitskraft im Punkt k definiert. Gleichzeitig gilt auch, daß γ_{ik} die Durchbiegung im Punkt k unter dem Einheitsmoment im Punkt i ist. Bei der zweiten Definition scheinen die Indices vertauscht zu sein, da der zweite Index die Stelle der Verschiebung und der erste Index die Stelle des Angriffs des Momentes angibt. Außerdem ist nicht unbedingt γ_{ik} gleich γ_{ki}. Dies führt nun bei den Einflußzahlen γ_{ik}, welche zur Berechnung der Verschiebung unter dem Einfluß eines Momentes dienen, zur Vertauschung der Indices gegenüber der sonst üblichen Regel. Erst dadurch erhält man übrigens eine symmetrische Elastizitätsmatrix.

Die Verschiebungen y_i sind

Abb. 2. Biegsame Welle auf starren Lagern.

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} m_k \omega^2 y_k - \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ki} \Theta_k \omega^2 \varphi_k . \tag{3}$$

Die Neigungswinkel sind

$$\varphi_i = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik} m_k \omega^2 y_k - \sum \beta_{ik} \Theta_k \omega^2 \varphi_k . \tag{4}$$

Damit kann man für das System, das eine Welle auf festen Lagern darstellt, das Gleichungssystem ansetzen. In Abb. 2 ist das System zu sehen; dabei bedeuten: Punkt 3 und 4 feste Lager, Punkt 5 und 6 rotierende scheibenförmige Massen. Es gilt $y_3 = 0$ und $y_4 = 0$. Für die Punkte 5 und 6 lauten die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
y_5 &= \alpha_{55} m_5 \omega^2 y_5 + \alpha_{56} m_6 \omega^2 y_6 - \gamma_{55} \Theta_5 \omega^2 \varphi_5 - \gamma_{65} \Theta_6 \omega^2 \varphi_6 , \\
y_6 &= \alpha_{65} m_5 \omega^2 y_5 + \alpha_{66} m_6 \omega^2 y_6 - \gamma_{56} \Theta_5 \omega^2 \varphi_5 - \gamma_{66} \Theta_6 \omega^2 \varphi_6 , \\
\varphi_5 &= \gamma_{55} m_5 \omega^2 y_5 + \gamma_{56} m_6 \omega^2 y_6 - \beta_{55} \Theta_5 \omega^2 \varphi_5 - \beta_{56} \Theta_6 \omega^2 \varphi_6 , \\
\varphi_6 &= \gamma_{65} m_5 \omega^2 y_5 + \gamma_{66} m_6 \omega^2 y_6 - \beta_{65} \Theta_5 \omega^2 \varphi_5 - \beta_{66} \Theta_6 \omega^2 \varphi_6 .
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

[1] *C. B. Biezeno* und *R. Grammel*, Technische Dynamik, 2. Aufl., Bd. 2, S. 184 und 185, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1953.

[2] Vgl. in diesem Buche S. 193.

In der Matrizenschreibweise ergibt sich das einfache Eigenwertproblem

$$\frac{1}{\omega^2}\begin{pmatrix} y_5 \\ y_6 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{55} & \alpha_{56} & \gamma_{55} & \gamma_{65} \\ \alpha_{65} & \alpha_{66} & \gamma_{56} & \gamma_{66} \\ \gamma_{55} & \gamma_{56} & \beta_{55} & \beta_{56} \\ \gamma_{65} & \gamma_{66} & \beta_{65} & \beta_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_5 & & & 0 \\ & m_5 & & \\ & & -\Theta_5 & \\ 0 & & & -\Theta_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_5 \\ y_6 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \end{pmatrix}$$

oder

$$\frac{1}{\omega^2}\mathfrak{y} = \mathfrak{A}_{Welle}\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{y}\,. \tag{6}$$

b) Die Ermittlung der Einflußzahlen unter der Annahme, daß die Welle unendlich biegesteif und die Lager elastisch seien. In Abb. 3 ist die Welle als starres Gebilde auf zwei Federn gelagert dargestellt. Dabei bedeuten Punkt *1* und *2* Festpunkte, Punkt *3* und *4* Massen der Lager und Teile der Wellenmasse an den Lagern, Punkt *5* und *6* rotierende scheibenförmige Massen und Teile der Wellenmasse an diesen Punkten, α_{33} und α_{44} alle Weichheiten zwischen den Festpunkten und der Mittellinie der Welle an den Punkten *3* und *4*.

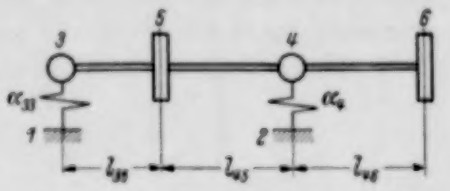

Abb. 3. Starre Welle auf elastischen Lagern.

Es gibt auch hier drei verschiedene Arten von Einflußzahlen. Zuerst seien die Verschiebungen unter der Einheitskraft behandelt. Es ist charakteristisch, daß nur die Verschiebungen in den Punkten *3* und *4* bestimmt werden müssen. Da die Welle gerade bleibt, ergeben sich die Verschiebungen in den übrigen Punkten allein aus den Längenverhältnissen. Außerdem sind die Verschiebungen in *3* und *4* nicht gekoppelt, da eine Kraft in *3* keine Verschiebung in *4* hervorrufen kann und umgekehrt. Es ist unter der Annahme von Fliehkräften in den Punkten *3* bis *6*

$$\left.\begin{aligned} y_3 &= \alpha_{33}\left(F_3 + \frac{l_{45}}{l_{34}}F_5 - \frac{l_{46}}{l_{34}}F_6\right), \\ y_4 &= \alpha_{44}\left(F_4 + \frac{l_{35}}{l_{34}}F_5 + \frac{l_{36}}{l_{34}}F_6\right) \end{aligned}\right\}. \tag{7}$$

Außerdem ist

$$\left.\begin{aligned} y_5 &= \frac{l_{45}}{l_{34}}y_3 + \frac{l_{35}}{l_{34}}y_4, \\ y_6 &= -\frac{l_{46}}{l_{34}}y_3 + \frac{l_{36}}{l_{34}}y_4 \end{aligned}\right\}. \tag{8}$$

In der Matrizenschreibweise wird dies

$$\begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{l_{45}}{l_{34}} & -\frac{l_{46}}{l_{34}} \\ 0 & 1 & \frac{l_{35}}{l_{34}} & \frac{l_{36}}{l_{34}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$\begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{l_{45}}{l_{34}} & \frac{l_{35}}{l_{34}} \\ -\frac{l_{46}}{l_{34}} & \frac{l_{36}}{l_{34}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Setzt man (9) in (10) ein, so erhält man

$$\begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{l_{45}}{l_{34}} & \frac{l_{35}}{l_{34}} \\ -\frac{l_{46}}{l_{34}} & \frac{l_{36}}{l_{34}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{l_{45}}{l_{34}} & -\frac{l_{46}}{l_{34}} \\ 0 & 1 & \frac{l_{35}}{l_{34}} & \frac{l_{36}}{l_{34}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Das zwischen dem Gleichheitszeichen und dem Kraftvektor stehende Produkt erlaubt eine völlig schematische Berechnung der α-Werte für die starre Welle auf elastischen Lagern.

Nun folgt die Behandlung der Verschiebungen unter der Wirkung der Momente. Es ist in Abb. 3 leicht zu sehen, daß ein in irgend einem Punkt der Welle angreifendes positives Einheitsmoment im Punkt *3* die Kraft $-1/l_{34}$ und im Punkt *4* die Kraft $1/l_{34}$ hervorruft. Die Verschiebung in Punkt *3* ist dann $-\alpha_{33}/l_{34}$ und im Punkt *4* α_{44}/l_{34}. Dafür kann man schreiben

$$\begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{l_{34}} \begin{pmatrix} \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Da (10) auch hier gilt, kann man setzen

$$\begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix} = \frac{1}{l_{34}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{l_{45}}{l_{34}} & \frac{l_{35}}{l_{34}} \\ -\frac{l_{46}}{l_{34}} & \frac{l_{36}}{l_{34}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Das zwischen dem Gleichheitszeichen und dem Momentenvektor stehende Produkt entspricht den Werten γ_{ki} für Verschiebungen unter der Wirkung von Momenten.

Es muß nun untersucht werden, wie die γ-Werte sich darstellen lassen, wenn sie die Neigung unter der Wirkung von Kräften darstellen. Am starren Stab sind die Neigungswinkel in allen Punkten einander gleich:

$$\varphi_3 = \varphi_4 = \varphi_5 = \varphi_6 . \tag{14}$$

Sie lassen sich aus den Verschiebungen in den Punkten *3* und *4* darstellen:

$$\varphi_3 = -\frac{y_3}{l_{34}} + \frac{y_4}{l_{34}} . \tag{15}$$

In der Matrizenrechnung wird dafür geschrieben

$$\begin{pmatrix} \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \end{pmatrix} = \frac{1}{l_{34}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Die Verschiebungen in *3* und *4* ergeben sich aus dem Angriffspunkt der Kraft nach dem Hebelgesetz. Es gelten die Gleichungen (7). Damit werden die Neigungen φ_i aus (9) und (16)

$$\begin{pmatrix} \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \end{pmatrix} + \frac{1}{l_{34}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{l_{45}}{l_{34}} & -\frac{l_{46}}{l_{34}} \\ 0 & 1 & \frac{l_{35}}{l_{34}} & \frac{l_{36}}{l_{34}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Vergleicht man die Matrizengleichungen (13) und (17), so sieht man, daß die Faktoren vertauscht sind; die Zahlenwerte sind jedoch die gleichen, die aus beiden Ausdrücken errechnet werden.

Es sind noch die Formeln für die Neigungen unter der Wirkung von Momenten herzuleiten. Auch hier sind alle Koordinaten φ_i einander gleich, da die Welle ja starr ist. Außerdem ist die Verschiebung in *3* und *4* unabhängig von der Stelle, an der das Moment M_i angreift, da man Momente am starren Körper verschieben darf. Die Verschiebungen in *3* und *4* sind

$$y_3 = -\frac{1}{l_{34}} \alpha_{33} (M_3 + M_4 + M_5 + M_6), \qquad y_4 = \frac{1}{l_{34}} \alpha_{44} (M_3 + M_4 + M_5 + M_6). \tag{18}$$

Mit dem Ausdruck (15) werden die Winkel

$$\varphi_3 = \varphi_4 = \varphi_5 = \varphi_6 = \left(\frac{1}{l_{34}}\right)^2 (\alpha_{33} + \alpha_{44})\,(M_3 + M_4 + M_5 + M_6)\,. \tag{19}$$

In der Matrizenschreibweise kann man setzen:

$$\begin{pmatrix}\varphi_3\\ \varphi_4\\ \varphi_5\\ \varphi_6\end{pmatrix} = \left(\frac{1}{l_{34}}\right)^2 \begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\\ -1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\alpha_{33} & 0\\ 0 & \alpha_{44}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}-1 & -1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}M_3\\ M_4\\ M_5\\ M_6\end{pmatrix}. \tag{20}$$

Hier ergibt das Produkt auf der rechten Seite der Gleichung zwischen Gleichheitszeichen und Momentvektor die Einflußzahlen β für die starre Welle. Der Ausdruck ließe sich einfacher schreiben, es soll jedoch ein schematischer Ausdruck gefunden werden, in dem alle Einflußzahlen zusammengefaßt sind. Dazu kann man nun (11), (13), (17) und (20) zusammenschreiben und erhält für die Elastizitätsmatrix einer starren Welle auf elastischer Lagerung

$$\mathfrak{A}_{Lager} = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\\ \frac{l_{45}}{l_{34}} & \frac{l_{35}}{l_{34}}\\ -\frac{l_{46}}{l_{34}} & \frac{l_{36}}{l_{34}}\\ -\frac{1}{l_{34}} & \frac{1}{l_{34}}\\ -\frac{1}{l_{34}} & \frac{1}{l_{34}}\\ -\frac{1}{l_{34}} & \frac{1}{l_{34}}\\ -\frac{1}{l_{34}} & \frac{1}{l_{34}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix}\alpha_{33} & 0\\ 0 & \alpha_{44}\end{pmatrix} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \frac{l_{45}}{l_{34}} & -\frac{l_{46}}{l_{34}} & -\frac{1}{l_{34}} & -\frac{1}{l_{34}} & -\frac{1}{l_{34}} & -\frac{1}{l_{34}}\\ 0 & 1 & \frac{l_{35}}{l_{34}} & \frac{l_{36}}{l_{34}} & \frac{1}{l_{34}} & \frac{1}{l_{34}} & \frac{1}{l_{34}} & \frac{1}{l_{34}} \end{array}\right). \tag{21}$$

Die Ausrechnung ergibt eine quadratische symmetrische Matrix. Die Elastizitätsmatrix für die biegsame Welle hat zwei Zeilen und zwei Spalten weniger. Für die Punkte *3* und *4* sind dort also Nullen zu setzen, da diese Punkte ja als starr angenommen waren. So kommt man auf zwei quadratische Matrizen der gleichen Zeilenzahl. Die gesamte Elastizitätsmatrix ist dann die Summe dieser beiden Matrizen:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{Lager} + \mathfrak{A}_{Welle}\,,$$

und die Eigenwertaufgabe lautet entsprechend (6)

$$\frac{1}{\omega^2}\,\mathfrak{y} = (\mathfrak{A}_{Lager} + \mathfrak{A}_{Welle})\,\mathfrak{M}\mathfrak{y}\,. \tag{23}$$

Diese Einflußzahlen gelten nun allgemein und sind nicht daran gebunden, daß man nur die biegekritische Drehzahl (lavalkritische) berechnet. Es würde ja auch für die Berechnung der Eigenfrequenzen der stillstehenden Welle gelten ebenso für jede andere Ordnung der Drehzahl.

Es soll angenommen werden, daß die Welle in allen Querschnitten eine kreisförmige Trägheitsellipse habe, also in allen Richtungen quer zur Wellenachse die gleiche Steifigkeit besitze. Wenn man die Gehäuseelastizität berücksichtigt, fügt man die Weichheit der umlaufenden und stillstehenden Teile zusammen. Es ist zunächst einmal angenommen worden, daß auch die Gehäuse in allen Richtungen die gleiche Steifigkeit besitzen sollen. Sind sie nun etwa in senkrechter und waagrechter Richtung verschieden steif, so kann man den Fall in beiden Richtungen getrennt behandeln, da dann eine Aufspaltung der kritischen Drehzahlen eintritt.[1] Bei verschiedener

[1] Vgl. Seite 168 bis 171 des in der Fußnote 1 auf Seite 34 zitierten Buches.

Steifigkeit der nicht rotierenden Teile tritt keine Koppelung in den beiden Richtungen ein. Der Fall unterschiedlicher Steifigkeit in den rotierenden Teilen (der Fall der „ovalen" Welle), soll hier nicht behandelt werden.

Während bei der biegekritischen Drehzahl einer biegsamen Welle auf festen Lagern die Welle als deformiertes und erstarrtes Gebilde umläuft und dabei die Dämpfung sehr gering ist, nehmen bei elastischen Gehäusen auch nicht rotierende Teile mit ihren Verformungen an der Schwingung teil. Sie werden bei der Bewegung laufend gespannt und entspannt und verbrauchen dabei Dämpfungsenergie. Man kann aus Erfahrung sagen, daß eine kritische Drehzahl in dem Maße weniger gefährlich ist, als nichtrotierende Teile mit ihren Deformationen daran teilnehmen. Durch die Berechnung der Schwingungsform und den Vergleich zwischen den Verschiebungen an rotierenden und nicht rotierenden Teilen kann die Gefährlichkeit einer kritischen Drehzahl beurteilt werden.

3. Das schwingende System in elastischer Aufhängung. Es sollen nun die Punkte *1* und *2*, welche die äußeren Teile der Gehäuse einer Maschine darstellen, nicht mehr unbeweglich sein. Damit werden die Massen an diesen Stellen nicht mehr als unendlich groß betrachtet (Abb. 1). So tritt aber nun die Frage auf, ob nicht auch noch weitere Massen, die an den Punkten *1* und *2* elastisch befestigt sind, an der Bewegung teilnehmen. Damit werden entsprechend dem in Ziff. *2* Gesagten rotierende und nicht rotierende Teile zu einem schwingenden System vereinigt. Dies ist bei punktförmigen Massen ohne weiteres möglich. Hier wird eine Drehung im Punkt selbst gar nicht registriert; der mathematische Ausdruck für die Schwingung im Stillstand ist identisch dem für die kritische Drehzahl. Scheibenförmige Massen dagegen sind im Stillstand mit Momenten belastet, welche die Ausschläge zu vergrößern versuchen und mit dem gleichen Vorzeichen wie die Fliehkräfte in das Gleichungssystem einzuführen sind. In der biegekritischen Drehzahl greifen an scheibenförmigen Massen Momente an, welche die Ausschläge zu verkleinern bestrebt sind. Diese Momente müssen mit entgegengesetztem Vorzeichen eingeführt werden. Dies hat zur Folge, daß eine so eingesetzte scheibenförmige Masse trotz der beiden hinzukommenden Koordinaten nur zu einem positiven Eigenwert Anlaß gibt; es erscheint bei der Eigenwertbestimmung noch ein negativer Eigenwert, der eine imaginäre Eigenschwingungszahl bedeutet.

Es soll nun ein System, wie in Abb. 4 gezeichnet, zugrunde gelegt werden. Dies ist nur eines der vielen möglichen Systeme. Indessen soll unter der Verwendung von nicht zuviel Massenpunkten das Prinzip erklärt werden; die Ausdehnung auf andere Fälle ist dann leicht möglich. In Abb. 3 bedeutet die Gerade *3—5—4—6* eine mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierende Welle, welche elastisch auf den Federn α_{33} und α_{44} in dem Gehäuse *1—2* gelagert ist. Dieses sei zwischen den Punkten *1* und *2* als biegesteif angenommen, was in den meisten Fällen gelten kann. An diesem Gehäuseblock sei biegeelastisch noch eine Masse m_7 angehängt. Der Gehäuseblock *1—2* sei elastisch auf den Federn α_{11} und α_{22} aufgehängt. Die Einflußzahlen der Aufhängung α_{11} und α_{22} sollen nicht mit den Einflußzahlen der Welle zusammengerechnet werden. Die Einflußzahlen der Welle seien, wie in Ziff. *2* gezeigt, unter der Annahme fester Punkte *1* und *2* berechnet.

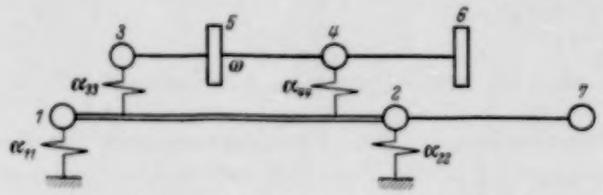

Abb. 4. Biegsame Welle elastisch in Gehäuse gelagert, das seinerseits elastisch auf dem Fundament aufgehängt ist.

Man kann für die Verschiebungen in den Punkten *1* bis *7* und für die Neigungswinkel in den Punkten *5* und *6* das Gleichungssystem von Tabelle 1 anschreiben, wenn man in den einzelnen Punkten die Fliehkräfte (1) und auf der Welle in den Punkten *5* und *6* die rückdrehenden Kreiselmomente (2) angreifen läßt. Die Verschiebungen der Punkte *3* bis *7* setzen sich aus den Verschiebungen des Systems als starrer Körper auf den Federn α_{11} und α_{22} und aus der elastischen Deformation des Systems selbst zusammen. Das erste ergibt sich aus der Lage der Punkte *1* und *2*; das zweite aus den Kräften, Momenten und Elastizitäten des Systems. Ebenso setzen sich die Neigungswinkel φ_5 und φ_6 zusammen. Es sind das die schon in Ziff. **2** beschriebenen Grundsätze.

Definiert man als Amplitudenvektor $\mathfrak{y}$

$$\mathfrak{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_7 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \end{pmatrix} \tag{27}$$

Tabelle 1

$y_1 =$	$\alpha_{11} m_1 \omega^2 y_1$	0	$\frac{l_{23}}{l_{12}} \alpha_{11} m_3 \omega^2 y_3$	$\frac{l_{24}}{l_{12}} \alpha_{11} m_4 \omega^2 y_4$	$\frac{l_{25}}{l_{12}} \alpha_{11} m_5 \omega^2 y_5$	$-\frac{l_{26}}{l_{12}} \alpha_{11} m_6 \omega^2 y_6$	$-\frac{l_{27}}{l_{12}} \alpha_{11} m_7 \omega^2 y_7$	$\frac{\alpha_{11}}{l_{12}} \Theta_5 \omega^2 \varphi_5$	$\frac{\alpha_{11}}{l_{12}} \Theta_6 \omega^2 \varphi_6$
$y_2 =$	0	$\alpha_{22} m_2 \omega^2 y_2$	$\frac{l_{13}}{l_{12}} \alpha_{22} m_3 \omega^2 y_3$	$\frac{l_{14}}{l_{12}} \alpha_{22} m_4 \omega^2 y_4$	$\frac{l_{15}}{l_{12}} \alpha_{22} m_5 \omega^2 y_5$	$\frac{l_{16}}{l_{12}} \alpha_{22} m_6 \omega^2 y_6$	$\frac{l_{17}}{l_{12}} \alpha_{22} m_7 \omega^2 y_7$	$-\frac{\alpha_{22}}{l_{12}} \Theta_5 \omega^2 \varphi_5$	$-\frac{\alpha_{22}}{l_{12}} \Theta_6 \omega^2 \varphi_6$
$y_3 =$	$\frac{l_{23}}{l_{12}} y_1$	$\frac{l_3}{l_{12}} y_2$	$\alpha_{33} m_3 \omega^2 y_3$	$\alpha_{34} m_4 \omega^2 y_5$	$\alpha_{35} m_5 \omega^2 y_5$	$\alpha_{36} m_6 \omega^2 y_6$	0	$-\gamma_{53} \Theta_5 \omega^2 \varphi_5$	$-\gamma_{63} \Theta_6 \omega^2 \varphi_6$
$y_4 =$	$\frac{l_{24}}{l_{12}} y_1$	$\frac{l_{14}}{l_{12}} y_2$	$\alpha_{43} m_3 \omega^2 y_3$	$\alpha_{44} m_4 \omega^2 y_4$	$\alpha_{45} m_5 \omega^2 y_5$	$\alpha_{46} m_6 \omega^2 y_6$	0	$-\gamma_{54} \Theta_5 \omega^2 \varphi_5$	$-\gamma_{64} \Theta_6 \omega^2 \varphi_6$
$\gamma_5 =$	$\frac{l_{25}}{l_{12}} y_1$	$\frac{l_{15}}{l_{12}} y_2$	$\alpha_{33} m_3 \omega^2 y_3$	$\alpha_{34} m_4 \omega^2 y_4$	$\alpha_{55} m_5 \omega^2 y_5$	$\alpha_{56} m_6 \omega^2 y_6$	0	$-\gamma_{55} \Theta_5 \omega^2 \varphi_5$	$-\gamma_{65} \Theta_6 \omega^2 \varphi_6$
$y_6 =$	$-\frac{l_{26}}{l_{12}} y_1$	$\frac{l_{16}}{l_{12}} y_2$	$\alpha_{63} m_3 \omega^2 y_3$	$\alpha_{64} m_4 \omega^2 y_4$	$\alpha_{65} m_5 \omega^2 y_5$	$\alpha_{66} m_6 \omega^2 y_6$	0	$-\gamma_{56} \Theta_5 \omega^2 \varphi_5$	$-\gamma_{66} \Theta_6 \omega^2 \varphi_6$
$\gamma_7 =$	$-\frac{l_{27}}{l_{12}} y_1$	$\frac{l_{17}}{l_{12}} y_2$	0	0	0	0	$\alpha_{77} m_7 \omega^2 y_7$	0	0
$\varphi_5 =$	$-\frac{1}{l_{12}} y_1$	$\frac{1}{l_{12}} y_2$	$\gamma_{53} m_3 \omega^2 y_3$	$\gamma_{54} m_4 \omega^2 y_4$	$\gamma_{55} m_5 \omega^2 y_5$	$\gamma_{56} m_6 \omega^2 y_6$	0	$-\beta_{55} \Theta_5 \omega^2 \varphi_5$	$-\beta_{56} \Theta_6 \omega^2 \varphi_6$
$\varphi_6 =$	$-\frac{1}{l_{12}} y_1$	$\frac{1}{l_{12}} y_2$	$\gamma_{63} m_3 \omega^2 y_3$	$\gamma_{64} m_4 \omega^2 y_4$	$\gamma_{65} m_5 \omega^2 y_5$	$\gamma_{66} m_6 \omega^2 y_6$	0	$-\beta_{65} \Theta_5 \omega^2 \varphi_5$	$-\beta_{66} \Theta_6 \omega^2 \varphi_6$

(24)

$$\mathfrak{E} + \mathfrak{L} = \left(\begin{array}{cc|ccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{l_{23}}{l_{12}} & \frac{l_{13}}{l_{12}} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{l_{24}}{l_{12}} & \frac{l_{14}}{l_{12}} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{l_{25}}{l_{12}} & \frac{l_{15}}{l_{12}} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{l_{26}}{l_{12}} & \frac{l_{16}}{l_{12}} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{l_{27}}{l_{12}} & \frac{l_{17}}{l_{12}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{l_{12}} & \frac{1}{l_{12}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{l_{12}} & \frac{1}{l_{12}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \qquad (25)$$

$$\mathfrak{A} = \left(\begin{array}{cc|ccccccc} \alpha_{11} & 0 & \frac{l_{23}}{l_{12}} \alpha_{11} & \frac{l_{24}}{l_{12}} \alpha_{11} & \frac{l_{25}}{l_{12}} \alpha_{11} & -\frac{l_{26}}{l_{12}} \alpha_{11} & -\frac{l_{27}}{l_{12}} \alpha_{11} & -\frac{\alpha_{11}}{l_{12}} & -\frac{\alpha_{11}}{l_{12}} \\ 0 & \alpha_{22} & \frac{l_{13}}{l_{12}} \alpha_{22} & \frac{l_{14}}{l_{12}} \alpha_{22} & \frac{l_{15}}{l_{12}} \alpha_{22} & \frac{l_{16}}{l_{12}} \alpha_{22} & \frac{l_{17}}{l_{12}} \alpha_{22} & \frac{\alpha_{22}}{l_{12}} & \frac{\alpha_{22}}{l_{12}} \\ \hline 0 & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \alpha_{35} & \alpha_{36} & 0 & \gamma_{53} & \gamma_{63} \\ 0 & 0 & \alpha_{43} & \alpha_{44} & \alpha_{45} & \alpha_{46} & 0 & \gamma_{54} & \gamma_{64} \\ 0 & 0 & \alpha_{53} & \alpha_{54} & \alpha_{55} & \alpha_{56} & 0 & \gamma_{55} & \gamma_{65} \\ 0 & 0 & \alpha_{63} & \alpha_{64} & \alpha_{65} & \alpha_{66} & 0 & \gamma_{56} & \gamma_{66} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{77} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{53} & \gamma_{54} & \gamma_{55} & \gamma_{56} & 0 & \beta_{55} & \beta_{56} \\ 0 & 0 & \gamma_{63} & \gamma_{64} & \gamma_{65} & \gamma_{66} & 0 & \beta_{65} & \beta_{66} \end{array}\right) \qquad (26)$$

und als Längenmatrix

$$\mathfrak{L} = \left(\begin{array}{cc|ccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{l_{33}}{l_{12}} & \frac{l_{13}}{l_{12}} & & & & & & & \\ \frac{l_{24}}{l_{12}} & \frac{l_{14}}{l_{12}} & & & & & & & \\ \frac{l_{25}}{l_{12}} & \frac{l_{15}}{l_{12}} & & & & 0 & & & \\ -\frac{l_{26}}{l_{12}} & \frac{l_{16}}{l_{12}} & & & & & & & \\ -\frac{l_{27}}{l_{12}} & \frac{l_{17}}{l_{12}} & & & & & & & \\ -\frac{1}{l_{12}} & \frac{1}{l_{12}} & & & & & & & \\ -\frac{1}{l_{12}} & \frac{1}{l_{12}} & & & & & & & \end{array}\right) \tag{28}$$

und als Elastizitätsmatrix, die in Tabelle 1 angeschriebene Matrix $\mathfrak{A}$ und als Massenmatrix

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} m_1 & & & & & & & & 0 \\ & m_2 & & & & & & & \\ & & m_3 & & & & & & \\ & & & m_4 & & & & & \\ & & & & m_5 & & & & \\ & & & & & m_6 & & & \\ & & & & & & m_7 & & \\ & & & & & & & -\Theta_5 & \\ 0 & & & & & & & & -\Theta_6 \end{pmatrix}, \tag{29}$$

so kann man für das Gleichungssystem anschreiben

$$\mathfrak{y} = (\mathfrak{L} + \omega^2\, \mathfrak{A}\, \mathfrak{M})\, \mathfrak{y}\,.$$

Dies stellt die allgemeine Eigenwertaufgabe dar. Bringt man $\mathfrak{L}$ auf die linke Seite der Gleichung und dividiert man durch $\mathfrak{E} - \mathfrak{L}$, so erhält man die einfache Eigenwertaufgabe, welche durch Iteration lösbar ist.[1, 2]

$$\frac{1}{\omega^2}\, \mathfrak{y} = (\mathfrak{E} - \mathfrak{L})^{-1}\, \mathfrak{A}\, \mathfrak{M}\, \mathfrak{y}\,. \tag{30}$$

Die Kehrmatrix $(\mathfrak{E} - \mathfrak{L})^{-1}$ ist leicht zu berechnen, da gilt

$$(\mathfrak{E} - \mathfrak{L})^{-1} = \mathfrak{E} + \mathfrak{L}\,, \tag{31}$$

wovon man sich leicht überzeugen kann. Führt man die Multiplikation

$$(\mathfrak{E} + \mathfrak{L})\, \mathfrak{A} \tag{32}$$

aus, so kommt man wieder auf eine symmetrische Elastizitätsmatrix. Auf die gleiche Matrix wäre man gekommen, wenn man alle Elastizitäten des Systems gleich berücksichtigt hätte.

Bisher war angenommen worden, daß die Elastizität der Gehäuse α_{33} und α_{44} schon in den Einflußzahlen der Welle enthalten seien. Man kann aber das Gleichungssystem für den Fall von Abb. 4 auch anschreiben, indem man das oben gezeigte Prinzip zweimal anwendet. Festpunkte für die Berechnung der Einflußzahlen der Punkte *3*, *4* und *7* sind dann die Punkte *1* und *2*. Die Punkte *3* und *4* sind Festpunkte für die Berechnung der Einflußzahlen der Welle. In diesen sind die Weichheiten α_{33} und α_{44} nicht mehr enthalten.

[1] *R. Zurmühl*, Praktische Mathematik, 2. Aufl., S. 133, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1957.
[2] *R. Zurmühl*, Matrizen, S. 152, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1950.

Tabelle 2a

$y_1 =$	$\alpha_{11} m_1 \omega^2 \gamma_1$	0	$\frac{l_{23}}{l_{12}} \alpha_{11} m_3 \omega^2 y_3$	$\frac{l_{24}}{l_{12}} \alpha_{11} m_4 \omega^2 y_4$	$\frac{l_{25}}{l_{12}} \alpha_{11} m_5 \omega^2 y_5$	$-\frac{l_{26}}{l_{12}} \alpha_{11} m_6 \omega^2 y_6$	$-\frac{l_{27}}{l_{12}} \alpha_{11} m_7 \omega^2 y_7$	$\frac{\alpha_{11}}{l_{12}} \Theta_5 \omega^2 \varphi_5$	$\frac{\alpha_{11}}{l_{12}} \Theta_6 \omega^2 \varphi_6$
$y_2 =$	0	$\alpha_{22} m_2 \omega^2 y_2$	$\frac{l_{13}}{l_{12}} \alpha_{22} m_3 \omega^2 y_3$	$\frac{l_{14}}{l_{12}} \alpha_{22} m_4 \omega^2 y_4$	$\frac{l_{15}}{l_{12}} \alpha_{22} m_5 \omega^2 y_5$	$\frac{l_{16}}{l_{12}} \alpha_{22} m_6 \omega^2 y_6$	$\frac{l_{17}}{l_{12}} \alpha_{22} m_7 \omega^2 y_7$	$-\frac{\alpha_{22}}{l_{12}} \Theta_5 \omega^2 \varphi_5$	$-\frac{\alpha_{22}}{l_{12}} \Theta_6 \omega^2 \varphi_6$
$y_3 =$	$\frac{l_{23}}{l_{12}} y_1$	$\frac{l_{13}}{l_{12}} y_2$	$\alpha_{33} m_3 \omega^2 y_3$	0	$\frac{l_{45}}{l_{34}} \alpha_{33} m_5 \omega^2 y_5$	$-\frac{l_{46}}{l_{34}} \alpha_{33} m_6 \omega^2 y_6$	0	$\frac{\alpha_{33}}{l_{34}} \Theta_5 \omega^2 \varphi_5$	$\frac{\alpha_{33}}{l_{34}} \Theta_6 \omega^2 \varphi_6$
$y_4 =$	$\frac{l_{24}}{l_{12}} y_1$	$\frac{l_{14}}{l_{12}} y_2$	0	$\alpha_{44} m_4 \omega^2 y_4$	$\frac{l_{35}}{l_{34}} \alpha_{44} m_5 \omega^2 y_5$	$\frac{l_{36}}{l_{34}} \alpha_{44} m_6 \omega^2 y_6$	0	$-\frac{\alpha_{44}}{l_{34}} \Theta_5 \omega^2 \varphi_5$	$-\frac{\alpha_{44}}{l_{34}} \Theta_6 \omega^2 \varphi_6$
$y_5 =$	0	0	$\frac{l_{45}}{l_{12}} y_3$	$\frac{l_{35}}{l_{12}} y_4$	$\alpha_{55} m_5 \omega^2 y_5$	$\alpha_{56} m_6 \omega^2 y_6$	0	$-\gamma_{55} \Theta_5 \omega^2 \varphi_5$	$-\gamma_{65} \Theta_6 \omega^2 \varphi_6$
$y_6 =$	0	0	$-\frac{l_{46}}{l_{12}} y_3$	$\frac{l_{36}}{l_{12}} y_4$	$\alpha_{65} m_5 \omega^2 y_5$	$\alpha_{66} m_6 \omega^2 y_6$	0	$-\gamma_{56} \Theta_5 \omega^2 \varphi_5$	$-\gamma_{66} \Theta_6 \omega^2 \varphi_6$
$y_7 =$	$-\frac{l_{27}}{l_{12}} y_1$	$\frac{l_{17}}{l_{12}} y_2$	0	0	0	0	$\alpha_{77} m_7 \omega^2 y_7$	0	0
$\varphi_5 =$	0	0	$-\frac{1}{l_{12}} y_3$	$\frac{1}{l_{12}} y_4$	$\gamma_{55} m_5 \omega^2 y_5$	$\gamma_{56} m_6 \omega^2 y_6$	0	$-\beta_{55} \Theta_5 \omega^2 \varphi_5$	$-\beta_{56} \Theta_6 \omega^2 \varphi_6$
$\varphi_6 =$	0	0	$-\frac{1}{l_{12}} y_3$	$\frac{1}{l_{12}} y_4$	$\gamma_{65} m_5 \omega^2 y_5$	$\gamma_{66} m_6 \omega^2 y_6$	0	$-\beta_{65} \Theta_5 \omega^2 \varphi_5$	$-\beta_{66} \Theta_6 \omega^2 \varphi_6$

(33)

Diese Überlegungen führen auf das Gleichungssystem der Tabelle 2a. Die Gleichung für y_1 und y_2 sind die gleichen, wie in (24) der Tabelle 1. Die Verschiebungen y_3, y_4 und y_7 setzen sich aus den Verschiebungen als starre Körper, gegeben durch die Lage der Punkte *1* und *2*, und aus den durch die Weichheiten α_{33} und α_{44} gegebenen Deformationen zusammen. Die Verschiebungen der Punkte *5* und *6* sind beschrieben durch die Lage der Punkte *3* und *4* und durch die Verbiegung der Welle selbst. Die Neigungswinkel φ_5 und φ_6 sind durch die Stellung der Punkte *3* und *4* und durch die Deformation der Welle definiert.

Amplitudenvektor und Massenmatrix bleiben gegenüber (27) und (29) unverändert. Die Längenmatrix ist

$$\mathfrak{L} = \left(\begin{array}{cccc|ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{l_{23}}{l_{12}} & \frac{l_{13}}{l_{12}} & 0 & 0 & & & & & \\ \frac{l_{24}}{l_{12}} & \frac{l_{14}}{l_{12}} & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & \frac{l_{45}}{l_{34}} & \frac{l_{35}}{l_{34}} & & & 0 & & \\ 0 & 0 & -\frac{l_{46}}{l_{34}} & \frac{l_{36}}{l_{34}} & & & & & \\ -\frac{l_{27}}{l_{12}} & \frac{l_{17}}{l_{12}} & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & -\frac{1}{l_{34}} & \frac{1}{l_{34}} & & & & & \\ 0 & 0 & -\frac{1}{l_{34}} & \frac{1}{l_{34}} & & & & & \end{array}\right). \tag{36}$$

Die Elastizitätsmatrix umfaßt wieder alle mit ω^2 behafteten Glieder (Tabelle 2b). Ihre Aufstellung ist einfacher als im Fall der Tabelle 1, da die Federn α_{33} und α_{44} nicht in die Einflußzahlen der Welle hineingerechnet zu werden brauchen (34). Dafür hat die Matrix $(\mathfrak{E} - \mathfrak{L})^{-1}$ einen etwas komplizierteren Aufbau. Sie läßt sich nicht mehr so einfach anschreiben wie im Fall (25), kann aber noch in allgemeiner Form angegeben werden: Ausdruck (35) in Tabelle 2b. Durch Ausmultiplizieren von $(\mathfrak{E} - \mathfrak{L})^{-1}\mathfrak{A}$ kommt man auch hier auf die eigentliche Elastizitätsmatrix des Systems. Die Ermittlung der Eigenwerte geschieht wieder wie bei (30). Die Eigenwertaufgabe hat auch hier die Form der Gleichung (30).

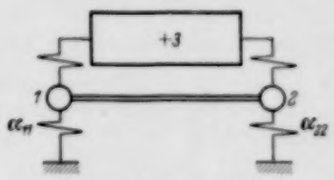

Abb. 5. Läufer mit elastisch aufgehängtem Gehäuse.

Es soll noch auf eine Möglichkeit hingewiesen werden, eine vereinfachte Rechnung im Falle eines Läufers durchzuführen, bei dem mit wesentlichen Verbiegungen im Drehzahlbereich nicht zu rechnen ist. Dies gilt vor allem, wenn man die Aufhängeschwingungen einer Maschine berechnen will. Das System Abb. 5 soll gegeben sein. Dabei ist unter den Punkten *1* und *2* ein Gehäuse auf den Federn α_{11} und α_{22} zu verstehen; der Punkt *3* stelle einen relativ steifen Läufer dar. Das Gehäuse soll noch ein äquatoriales Massenträgheitsmoment Θ_{12} besitzen. Dazu gehört dann ein Moment

$$M_{12} = \Theta_{12}\,\omega^2\,\varphi_{12}\,.$$

Das rückdrehende Kreiselmoment des Läufers ist

$$M_3 = -\,\Theta_3\,\omega^2\,\varphi_3\,.$$

Drückt man nun die Neigungswinkel durch die Verschiebungen in *1* und *2* aus:

$$\varphi_{12} = \varphi_3 = \frac{1}{l_{12}}\,(y_2 - y_1)\,,$$

Tabelle 2b

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \frac{l_{23}}{l_{12}}\alpha_{11} & \frac{l_{24}}{l_{12}}\alpha_{11} & \frac{l_{25}}{l_{12}}\alpha_{11} & -\frac{l_{26}}{l_{12}}\alpha_{11} & -\frac{l_{27}}{l_{12}}\alpha_{11} & -\frac{\alpha_{11}}{l_{12}} & -\frac{\alpha_{11}}{l_{12}} \\ 0 & \alpha_{22} & \frac{l_{13}}{l_{12}}\alpha_{22} & \frac{l_{14}}{l_{12}}\alpha_{22} & \frac{l_{15}}{l_{12}}\alpha_{22} & \frac{l_{16}}{l_{12}}\alpha_{22} & \frac{l_{17}}{l_{12}}\alpha_{22} & \frac{\alpha_{22}}{l_{12}} & \frac{\alpha_{22}}{l_{12}} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 & \frac{l_{45}}{l_{34}}\alpha_{33} & -\frac{l_{46}}{l_{34}}\alpha_{33} & 0 & -\frac{\alpha_{33}}{l_{34}} & -\frac{\alpha_{33}}{l_{34}} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} & \frac{l_{35}}{l_{34}}\alpha_{44} & \frac{l_{36}}{l_{34}}\alpha_{44} & 0 & \frac{\alpha_{44}}{l_{34}} & \frac{\alpha_{44}}{l_{34}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{55} & \alpha_{56} & 0 & \gamma_{55} & \gamma_{65} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{65} & \alpha_{66} & 0 & \gamma_{56} & \gamma_{66} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{77} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_{55} & \gamma_{56} & 0 & \beta_{55} & \beta_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_{65} & \gamma_{66} & 0 & \beta_{65} & \beta_{66} \end{pmatrix} \tag{34}$$

$$(\mathfrak{E} - \mathfrak{L})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{l_{23}}{l_{12}} & \frac{l_{13}}{l_{12}} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{l_{24}}{l_{12}} & \frac{l_{14}}{l_{12}} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{l_{23}}{l_{12}}\frac{l_{45}}{l_{34}} + \frac{l_{24}}{l_{12}}\frac{l_{35}}{l_{34}} & \frac{l_{13}}{l_{12}}\frac{l_{45}}{l_{34}} + \frac{l_{14}}{l_{12}}\frac{l_{25}}{l_{34}} & \frac{l_{45}}{l_{34}} & \frac{l_{35}}{l_{34}} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{l_{23}}{l_{12}}\frac{l_{46}}{l_{34}} + \frac{l_{24}}{l_{12}}\frac{l_{36}}{l_{34}} & -\frac{l_{13}}{l_{12}}\frac{l_{46}}{l_{34}} + \frac{l_{14}}{l_{12}}\frac{l_{36}}{l_{34}} & -\frac{l_{46}}{l_{34}} & \frac{l_{36}}{l_{34}} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{l_{27}}{l_{12}} & \frac{l_{17}}{l_{12}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{l_{23}}{l_{12}}\frac{1}{l_{34}} + \frac{l_{24}}{l_{12}}\frac{1}{l_{34}} & -\frac{l_{13}}{l_{12}}\frac{1}{l_{24}} + \frac{l_{14}}{l_{12}}\frac{1}{l_{34}} & -\frac{1}{l_{34}} & \frac{1}{l_{34}} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{l_{23}}{l_{12}}\frac{1}{l_{34}} + \frac{l_{24}}{l_{12}}\frac{1}{l_{34}} & -\frac{l_{13}}{l_{12}}\frac{1}{l_{24}} + \frac{l_{14}}{l_{12}}\frac{1}{l_{34}} & -\frac{1}{l_{34}} & \frac{1}{l_{34}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{35}$$

so erhält man für die Momente

$$M_{12} = \frac{1}{l_{12}}\Theta_{12}\,\omega^2\,(y_2 - y_1)\,, \qquad M_3 = -\frac{1}{l_{12}}\Theta_3\,\omega^2\,(y_2 - y_1)$$

und für die Kräfte in den Punkten *1* und *2*

$$P_1 = \omega^2\left(\frac{\Theta_3}{l_{12}^2} - \frac{\Theta_{12}}{l_{12}^2}\right)(y_2 - y_1)\,, \qquad -P_2 = \omega^2\left(\frac{\Theta_3}{l_{12}^2} - \frac{\Theta_{12}}{l_{12}^2}\right)(y_2 - y_1)\,.$$

Mit $\vartheta_{12} = \Theta_{12}/l_{12}^2$ und $\vartheta_3 = \Theta_3/l_{12}^2$ kann man folgendes Gleichungssystem anschreiben:

$$\begin{aligned} y_1 = {} & \alpha_{11}\,(m_1 + \vartheta_{12} - \vartheta_3)\,\omega^2\,y_1 - \alpha_{11}\,(\vartheta_{12} - \vartheta_3)\,\omega^2\,y_2 + \alpha_{11}\,\frac{l_{23}}{l_{12}}\,m_3\,\omega^2\,y_3\,, \\ y_2 = {} & -\alpha_{22}\,(\vartheta_{12} - \vartheta_3)\,\omega^2\,y_1 + \alpha_{22}\,(m_2 + \vartheta_{12} - \vartheta_3)\,\omega^2\,y_2 + \alpha_{22}\,\frac{l_{13}}{l_{12}}\,m_3\,\omega^2\,y_3\,, \\ y_3 = {} & \frac{l_{23}}{l_{12}}\,y_1 + \frac{l_{13}}{l_{12}}\,y_2 + \alpha_{33}\,m_3\,\omega^2\,y_3\,. \end{aligned}$$

Die auch außerhalb der Hauptdiagonalen besetzte Massenmatrix ist

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} m_1 + \vartheta_{12} - \vartheta_3 & -(\vartheta_{12} - \vartheta_3) & 0 \\ -(\vartheta_{12} - \vartheta_3) & m_2 + \vartheta_{12} - \vartheta_3 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Die Elastizitätsmatrix ist

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \frac{l_{23}}{l_{12}}\alpha_{11} \\ 0 & \alpha_{22} & \frac{l_{13}}{l_{12}}\alpha_{22} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{38}$$

und die Matrix $(\mathfrak{E} - \mathfrak{L})^{-1}$ ist

$$(\mathfrak{E} - \mathfrak{L})^{-1} = \mathfrak{E} + \mathfrak{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{l_{23}}{l_{12}} & \frac{l_{13}}{l_{12}} & 1 \end{pmatrix}. \tag{39}$$

An den Stator *1—2* kann man noch beliebig Massen anhängen.

Die einfache Eigenwertaufgabe lautet nun wieder wie bei Gleichung (30)

$$\frac{1}{\omega^2}\,\mathfrak{y} = (\mathfrak{E} - \mathfrak{L})^{-1}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{y}\,.$$

4. Das schwingende System frei im Raum. Man stelle sich jetzt vor, daß die Federn α_{11} und α_{22} sehr weich seien im Vergleich zu den übrigen im System vorkommenden Elastizitäten. Eine zu diesem System gehörende Maschine würde im unteren Drehzahlbereich (bei oder unterhalb von 30% der Nenndrehzahl) Aufhängeschwingungen durchfahren. Diese sind im allgemeinen ungefährlich. Die eigentlichen störenden kritischen Drehzahlen im höheren Drehzahlbereich erscheinen aber in der Rechnung erst als höhere Eigenwerte. Man müßte also bei einer mehrfachen Durchführung der Rechnung jedesmal erst die beiden unteren Eigenschwingungszahlen berechnen, um die wirklich interessierenden Werte zu bekommen. Außerdem würden bei der Rechnung zu den großen Werten für die Weichheit der Aufhängung der Maschine die kleinen Werte für die Elastizität des Systems selbst hinzukommen. Die Rechnung müßte deshalb mit großer Genauigkeit durchgeführt werden, um die höheren Eigenwerte noch genügend genau zu ergeben.

Es ist einfacher, in einem gewissen Abstand von den Aufhänge-Eigenfrequenzen das System als frei im Raum zu betrachten. Es ist wohl eine Transformation des Gleichungssystems erforderlich. Es scheint zuerst die Schwierigkeit zu bestehen, die Einflußzahlen für diesen Fall zu berechnen. Diese werden aber wie in Ziff. **2** und **3** unter der Voraussetzung berechnet, daß die Federn α_{11} und α_{22} unendlich steif seien.

Es soll zur Erklärung des Verfahrens das Gleichungssystem Tabelle 1 zugrunde gelegt werden. Dividiert man die erste Gleichung für y_1 durch $\alpha_{11} m_1 \omega^2$ und die zweite Gleichung für y_2 durch $\alpha_{22} m_2 \omega^2$, so erhält man

$$\frac{y_1}{\alpha_{11} m_1 \omega^2} = y_1 + \frac{l_{23}}{l_{12}}\frac{m_3}{m_1} y_3 + \frac{l_{24}}{l_{12}}\frac{m_4}{m_1} y_4 \cdots - \frac{l_{27}}{l_{12}}\frac{m_7}{m_1} y_7 + \frac{1}{l_{12}}\frac{\Theta_5}{m_1}\varphi_5 + \frac{1}{l_{12}}\frac{\Theta_6}{m_1}\varphi_6\,,$$

$$\frac{y_2}{\alpha_{22} m_2 \omega^2} = y_2 + \frac{l_{13}}{l_{12}}\frac{m_3}{m_2} y_3 + \frac{l_{14}}{l_{12}}\frac{m_4}{m_2} y_4 \cdots + \frac{l_{17}}{l_{12}}\frac{m_7}{m_2} y_7 - \frac{1}{l_{12}}\frac{\Theta_5}{m_2}\varphi_5 - \frac{1}{l_{12}}\frac{\Theta_6}{m_2}\varphi_6\,.$$

Läßt man $\alpha_{11} \to \infty$ und $\alpha_{22} \to \infty$ gehen, so werden die beiden linken Seiten der Gleichungen zu Null, und man kann für y_1 und y_2 schreiben

$$y_1 = -\frac{l_{23}}{l_{12}}\frac{m_3}{m_1} y_3 - \frac{l_{24}}{l_{12}}\frac{m_4}{m_1} y_4 \cdots + \frac{l_{27}}{l_{12}}\frac{m_7}{m_1} y_7 - \frac{1}{l_{12}}\frac{\Theta_5}{m_1}\varphi_5 - \frac{1}{l_{12}}\frac{\Theta_6}{m_1}\varphi_6\,,$$

$$y_2 = -\frac{l_{13}}{l_{12}}\frac{m_3}{m_2} y_3 - \frac{l_{14}}{l_{12}}\frac{m_4}{m_2} y_4 \cdots - \frac{l_{17}}{l_{12}}\frac{m_7}{m_2} y_7 + \frac{1}{l_{12}}\frac{\Theta_5}{m_2}\varphi_5 + \frac{1}{l_{12}}\frac{\Theta_6}{m_2}\varphi_6\,.$$

In der Matrizenschreibweise ergibt dies

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{l_{23}}{l_{12}}\frac{m_3}{m_1} & \frac{l_{24}}{l_{12}}\frac{m_4}{m_1} \cdots & -\frac{l_{27}}{l_{12}}\frac{m_7}{m_1} & \frac{1}{l_{12}}\frac{\Theta_5}{m_1} & \frac{1}{l_{12}}\frac{\Theta_6}{m_1} \\ \frac{l_{13}}{l_{12}}\frac{m_3}{m_2} & \frac{l_{14}}{l_{12}}\frac{m_4}{m_2} \cdots & \frac{l_{17}}{l_{12}}\frac{m_7}{m_2} & -\frac{1}{l_{12}}\frac{\Theta_5}{m_2} & -\frac{1}{l_{12}}\frac{\Theta_6}{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \\ \vdots \\ y_7 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \end{pmatrix}. \tag{40}$$

oder kurz

$$\mathfrak{y}_{1,2} = -\mathfrak{L}_m\,\mathfrak{y}_{3\div 7}\,.$$

Tabelle 3a

$$\begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{l_{23}}{l_{12}} & \frac{l_{13}}{l_{12}} \\ \frac{l_{24}}{l_{12}} & \frac{l_{14}}{l_{12}} \\ \frac{l_{25}}{l_{12}} & \frac{l_{15}}{l_{12}} \\ -\frac{l_{26}}{l_{12}} & \frac{l_{16}}{l_{12}} \\ -\frac{l_{27}}{l_{12}} & \frac{l_{17}}{l_{12}} \\ -\frac{1}{l_{12}} & \frac{1}{l_{12}} \\ -\frac{1}{l_{12}} & \frac{1}{l_{12}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \omega^2 \begin{pmatrix} \alpha_{33} & \alpha_{34} & \alpha_{35} & \alpha_{36} & 0 & \gamma_{37} & \gamma_{38} \\ \alpha_{43} & \alpha_{44} & \alpha_{45} & \alpha_{46} & 0 & \gamma_{47} & \gamma_{48} \\ \alpha_{53} & \alpha_{54} & \alpha_{55} & \alpha_{56} & 0 & \gamma_{57} & \gamma_{58} \\ \alpha_{63} & \alpha_{64} & \alpha_{65} & \alpha_{66} & 0 & \gamma_{67} & \gamma_{68} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{77} & 0 & 0 \\ \gamma_{73} & \gamma_{74} & \gamma_{75} & \gamma_{76} & 0 & \beta_{77} & \beta_{78} \\ \gamma_{83} & \gamma_{84} & \gamma_{85} & \gamma_{86} & 0 & \beta_{87} & \beta_{88} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_3 & & & & & & 0 \\ & m_4 & & & & & \\ & & m_5 & & & & \\ & & & m_6 & & & \\ & & & & m_7 & & \\ & & & & & -\Theta_5 & \\ 0 & & & & & & -\Theta_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \end{pmatrix} \tag{41}$$

Für die übrigen Koordinaten ist das Gleichungssystem in der Matrizenschreibweise auf Tabelle 3a angegeben. Führt man nun in dieses System die Gleichung (40) ein, so kommen die Koordinaten y_1 und y_2 nicht mehr vor, und man erhält ein Gleichungssystem von der Form:

$$\mathfrak{y}_{3\div 7} = -\mathfrak{L}_l \mathfrak{L}_m \mathfrak{y}_{3\div 7} + \omega^2 \mathfrak{A}_{3\div 7} \mathfrak{M}_{3\div 7} \mathfrak{y}_{3\div 7} .$$

Bringt man $\mathfrak{L}\,\mathfrak{L}_m$ auf die linke Seite der Gleichung, so erhält man

$$\frac{1}{\omega^2} (\mathfrak{E} + \mathfrak{L}_l \mathfrak{L}_m) \mathfrak{y}_{3\div 7} = \mathfrak{A}_{3\div 7} \mathfrak{M}_{3\div 7} \mathfrak{y}_{3\div 7}$$

oder

$$\frac{1}{\omega^2} \mathfrak{R}\, \mathfrak{y}_{3\div 7} = \mathfrak{A}_{3\div 7} \mathfrak{M}_{3\div 7} \mathfrak{y}_{3\div 7} .$$

Die Matrix $\mathfrak{R}$ ist auf der Tabelle 3b angeschrieben.

Tabelle 3b

$$\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{l_{23}}{l_{12}} & \frac{l_{13}}{l_{12}} \\ \frac{l_{24}}{l_{12}} & \frac{l_{14}}{l_{12}} \\ \frac{l_{25}}{l_{12}} & \frac{l_{15}}{l_{12}} \\ -\frac{l_{26}}{l_{12}} & \frac{l_{16}}{l_{12}} \\ -\frac{l_{27}}{l_{12}} & \frac{l_{17}}{l_{12}} \\ -\frac{1}{l_{12}} & \frac{1}{l_{12}} \\ -\frac{1}{l_{12}} & \frac{1}{l_{12}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{l_{23}}{l_{12}} \frac{m_3}{m_1} & \frac{l_{24}}{l_{12}} \frac{m_4}{m_1} & \frac{l_{25}}{l_{12}} \frac{m_5}{m_1} & -\frac{l_{26}}{l_{12}} \frac{m_6}{m_1} & -\frac{l_{27}}{l_{12}} \frac{m_7}{m_1} & \frac{1}{l_{12}} \frac{\Theta}{m_1} & \frac{1}{l_{12}} \frac{\Theta_6}{m_1} \\ \frac{l_{13}}{l_{12}} \frac{m_3}{m_2} & \frac{l_{14}}{l_{12}} \frac{m_4}{m_2} & \frac{l_{15}}{l_{12}} \frac{m_5}{m_2} & \frac{l_{16}}{l_{12}} \frac{m_6}{m_2} & \frac{l_{17}}{l_{12}} \frac{m_7}{m_2} & -\frac{1}{l_{12}} \frac{\Theta_5}{m_2} & -\frac{1}{l_{12}} \frac{\Theta_6}{m_2} \end{pmatrix} \tag{42}$$

Dies stellt das allgemeine Eigenwertproblem dar.
Durch Bilden der Kehrmatrix für den Ausdruck (42) kommt man auf die einfache Aufgabe

$$\frac{1}{\omega^2} \mathfrak{y}_{3\div 7} = \mathfrak{R}^{-1} \mathfrak{A}_{3\div 7} \mathfrak{M}_{3\div 7} \mathfrak{y}_{3\div 7} . \tag{43}$$

Das Gleichungssystem hat nun zwei Koordinaten verloren. Praktisch läuft die Umformung auf eine Transformation der Elastizitätsmatrix durch Vormultiplizieren mit dem Kehrwert $\mathfrak{R}^{-1}$ einer

aus Längen- und Massenverhältnissen entstandenen Matrix hinaus. Um die Schwingungsform vollständig zu bestimmen, muß man die Koordinaten y_1 und y_2 aus den Gleichungen (40) berechnen, wenn die Werte für die übrigen Koordinaten bestimmt sind.

Liegt ein Gleichungssystem von der Form der Tabelle 2a vor, und soll dieses als frei im Raum betrachtet werden, so muß die Elastizitätsmatrix ermittelt werden, für welche die Punkte *1* und *2* Festpunkte sind. Um von der Annahme der Festpunkte in *3* und *4* auf die Festpunkte in *1* und *2* zu kommen, muß die in Ziff. **3** beschriebene Transformation, nämlich die Gleichung (32) angewandt werden. Man hat mit $\mathfrak{A}$ aus (34) und $\mathfrak{L}$ aus (36) ohne die ersten beiden Zeilen und Spalten (Tabelle 2b):

$$\left(\begin{array}{cc|ccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\frac{l_{45}}{l_{34}} & \frac{l_{35}}{l_{34}} & 1 & & & & 0 \\
-\frac{l_{46}}{l_{34}} & \frac{l_{36}}{l_{34}} & & 1 & & & \\
0 & 0 & & & 1 & & \\
-\frac{1}{l_{34}} & \frac{1}{l_{34}} & & & & 1 & \\
-\frac{1}{l_{34}} & \frac{1}{l_{34}} & 0 & & & & 1
\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|ccccc}
\alpha_{33} & 0 & \frac{l_{45}}{l_{34}}\alpha_{33} & -\frac{l_{46}}{l_{34}}\alpha_{33} & 0 & -\frac{\alpha_{33}}{l_{34}} & -\frac{\alpha_{33}}{l_{34}} \\
0 & \alpha_{44} & \frac{l_{35}}{l_{34}}\alpha_{44} & \frac{l_{36}}{l_{34}}\alpha_{33} & 0 & \frac{\alpha_{44}}{l_{34}} & \frac{\alpha_{44}}{l_{34}} \\
\hline
0 & 0 & \alpha_{55} & \alpha_{56} & 0 & \gamma_{55} & \gamma_{65} \\
0 & 0 & \alpha_{65} & \alpha_{66} & 0 & \gamma_{56} & \gamma_{66} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{77} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \gamma_{55} & \gamma_{56} & 0 & \beta_{55} & \beta_{56} \\
0 & 0 & \gamma_{65} & \gamma_{66} & 0 & \beta_{65} & \beta_{66}
\end{array}\right).$$

In den Ausdrücken für y_1 und y_2 treten Bedingungen auf, welche nur noch Längen, Neigungen, Massen und Drehmassen enthalten. Dies stellt die Bedingungen dar, die für einen Punkthaufen im Raum gelten, nämlich daß der Schwerpunkt des Haufens keine Verschiebung erfahren kann, was auch immer die einzelnen Punkte für Bewegungen ausführen. Damit kann die Rechnung kontrolliert werden. Bei der errechneten Schwingungsform müssen die an den einzelnen Massenpunkten angreifenden Fliehkräfte und Momente die beiden Bedingungen erfüllen:

a) Die Summe aller Kräfte, die am System angreifen, muß Null sein;
b) die Summe aller Momente muß Null sein.

Zu a): Als Kräfte kommen nur Fliehkräfte in Frage, die Massenträgheitsmomente ergeben keine Beiträge dazu. Es gilt also

$$\sum_{i=1}^{n} m_i y_i = 0$$

oder als skalares Vektorprodukt geschrieben

$$(m_1\, m_2 \ldots m_n \mid 0 \ldots 0)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ \hline \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} = 0\,. \tag{45}$$

Zu b): Die Momente setzen sich aus folgenden Anteilen zusammen: Aus den Momenten der Fliehkräfte um einen Punkt; dazu wird eine Längskoordinate x eingeführt; es ist dabei gleichgültig, wo man den Nullpunkt für x wählt. Um keinen Vorzeichenwechsel zu haben, ist es zweckmäßig den Nullpunkt in die ganz links liegende Masse zu legen. Das Moment der an den einzelnen Massenpunkten angreifenden Fliehkräfte ist dann

$$\sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i = 0\,.$$

Es kommen die Momente der Drehmassen hinzu, wobei die Werte Θ_i für rotierende Massen wegen des Kreiseleffektes negativ, die Werte für nicht rotierende Massen positiv eingesetzt werden:

$$M = \sum_{i=1}^{n} \Theta_i \omega^2 \varphi_i .$$

Dies ergibt

$$\sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} \Theta_i \varphi_i = 0 .$$

Als skalares Vektorprodukt kann man dafür schreiben

$$(m_1 x_1 \ldots m_n x_n \mid \Theta_1 \ldots \Theta_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ -- \\ \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} = 0 . \tag{46}$$

5. Zur Rechenpraxis. Es ist in der bisherigen Ausführung versucht worden, zu zeigen, daß sich die Gleichungssysteme, auch wenn sie noch so umfangreich sein mögen, bei allen behandelten Fällen übersichtlich schreiben lassen. Die Rechnung kann also schon unmittelbar nach dem Aufstellen der Gleichungssysteme auf völlig schematische Rechenoperationen überführt werden. Diese sind ohne grundsätzliche Überlegungen auszuführen und können von einer Rechenhilfskraft auf einer elektrischen Tischrechenmaschine oder bei größerem Umfang auf einem elektronischen Rechenautomaten durchgeführt werden.

Bei der Eigenwertbestimmung gibt es verschiedene Verfahren. Bei den vorliegenden Aufgaben sind Iterationsverfahren besonders geeignet. Diese führen zuerst auf den größten Eigenwert, also die unterste Eigenschwingungszahl. Dann kann man auch die höheren Eigenschwingungszahlen bestimmen.

Die Schwierigkeit der Rechnung liegt darin, zu einer gegebenen Maschine ein System zu finden, das die gewünschten Eigenwerte genügend genau ergibt. Dafür ist eine gute Kenntnis der Verteilung von Masse und Elastizität notwendig. Man wird mit möglichst wenig Koordinaten auszukommen suchen. Dabei ist zu bedenken, daß im allgemeinen nur ein bestimmter Drehzahlbereich interessiert. Man kann also sehr weich am Gehäuse befestigte Massen in der Annahme weglassen, daß sie im interessierenden Drehzahlbereich schon überkritisch sind. Ebenso ist zu untersuchen, ob in diesem Bereich schon Verschiebungen zwischen relativ steif verbundenen Gliedern auftreten. Indessen ist der Genauigkeit der Rechnung durch eine genügende Anzahl von Koordinaten keine Grenze gesetzt.

Eine größere Schwierigkeit liegt in der genauen rechnerischen Erfassung der Elastizität der einzelnen Glieder. Dies setzt nicht nur Kenntnisse der neueren Festigkeitslehre voraus; vielfach gibt es noch keine rechnerische Lösung für ein Problem. Dann hilft nur noch ein statischer Versuch.

Es soll nun noch gezeigt werden, wie man mit der Aufstellung des Systems beginnen kann, wenn bei der zu untersuchenden Maschine ein relativ steifes Gehäuse als Mittelstück vorliegt, an dem die übrigen Teile rotierend oder nicht rotierend befestigt sind. Diesen Block nimmt man als unendlich steif an, wie dies bisher mit dem Strang *1—2* geschehen ist. Man muß nun ein Ersatzschema suchen, das sowohl für eine Auslenkung in y-Richtung als auch für eine Drehung um den Winkel φ die Masse repräsentiert. Man könnte nun die Gesamtmasse im Schwerpunkt des Gehäuseblocks vereinigen und noch das äquatoriale Massenträgheitsmoment dazu angeben. Da aber in den Festpunkten *1* und *2* zwei y-Koordinaten gegeben sind, wird man Masse und Massenträgheitsmoment durch zwei Punktmassen darstellen. Es sind die Gesetze der Bewegung des starren Körpers nämlich drei Bedingungen zu erfüllen:

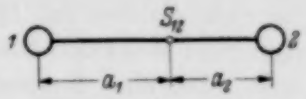

Abb. 6. Reduktion steifer Gehäuseteile auf zwei Punktmassen.

1. Die Gesamtmasse muß erhalten bleiben;
2. der Schwerpunkt muß an der gleichen Stelle bleiben;
3. das Massenträgheitsmoment muß erhalten bleiben.

Dies ergibt nach Abb. 6 folgende Bedingungen:

$$m_1 + m_2 = \sum m , \qquad m_1 a_1 = m_2 a_2 , \qquad m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2 = \sum \Theta_{s} + \sum m r^2 . \tag{47}$$

Dabei ist r der Abstand der Schwerpunkte der einzelnen Teile vom Gesamtschwerpunkt S_{12} der Massen *1—2*. Aus diesen Bedingungen ergeben sich durch einfache Umrechnung folgende Formeln, wobei man a_2 beliebig annehmen kann:

$$m_2 = \frac{1}{\frac{1}{\sum m} + \frac{a_2^2}{\sum \Theta_{ae}}}, \qquad m_1 = \sum m - m_2, \qquad a_1 = \frac{m_2}{m_1} a_2. \tag{48}$$

Die Durchführung der Rechnung geschieht mit einer Tabelle, wie sie im folgenden Beispiel angewandt ist.

6. Rechenbeispiel. Es sei der in Abb. 7 gezeichnete Axialverdichter als Beispiel gegeben. Die Gehäuse *a*, *b* und *c* seien so steif, daß sie für die zu berechnenden Schwingungen als starrer Block *1—2* betrachtet werden können. In den Gehäusen *a* und *c* sei ein Läufer gelagert, der aus einer steifen Trommel mit relativ weichen Endscheiben und Zapfen bestehen soll. Die elastischen Verschiebungen der Gehäusenaben mit den Lagern gegenüber den Außenringen der Gehäuse werden in der Rechnung berücksichtigt. Damit hat man zur Berechnung der Einflußzahlen des Läufers unter der Annahme festgehaltener Gehäuseaußenringe das Schema von Abb. 8. Die Federn α_{55} und α_{66} der Punkte *5* und *6*, welche masselos sein sollen, bestehen aus allen zwischen der Läufertrommel und den Außenringen der Gehäuse befindlichen Weichheiten. So können für den Schwerpunkt der Läufertrommel mit den beiden Koordinaten y_3 und φ_3 die Einflußzahlen berechnet werden. Am Gehäuse *c* sei noch ein Tragarm befestigt, in dem eine sehr steife Antriebswelle gelagert sein soll. Die Welle mit dem Tragarm ergibt den Massepunkt *4*.

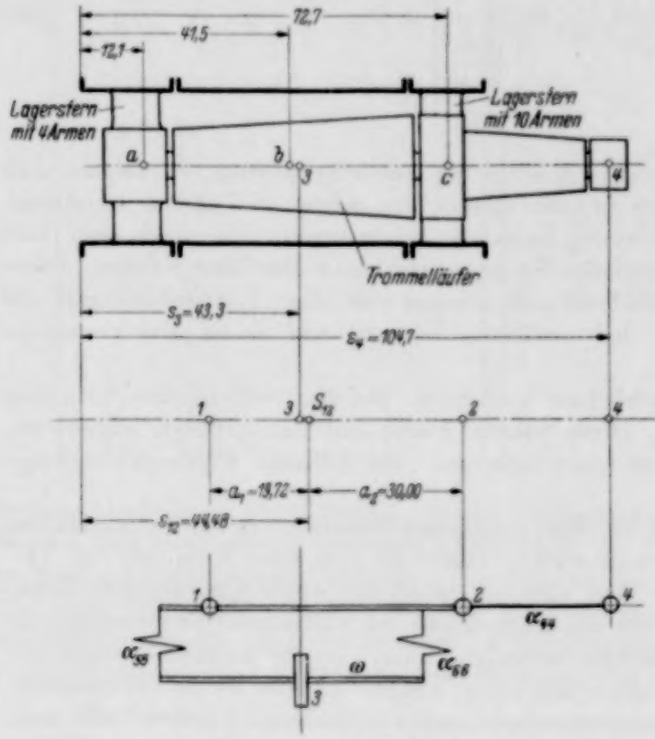

Abb. 7. Beispiel: Reduktion einer Maschine auf ein Ersatzsystem (Längen in cm).

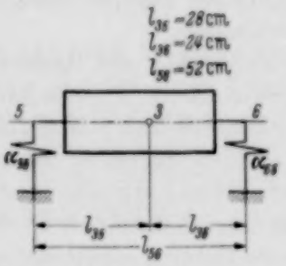

Abb. 8. Beispiel: Schema zur Berechnung der Einflußzahlen des Trommelläufers.

Der ganze Verdichter sei auf dem Prüfstand so weich aufgehängt, daß er im normalen Drehzahlbereich als frei im Raum befindlich betrachtet werden kann. Von den vier Massepunkten mit den fünf Koordinaten wird man also nach der Transformation (Ziff. 4) auf drei Koordinaten kommen. Da eine Kreiselmasse vorliegt, wird man zwei positive und einen negativen Eigenwert erhalten. Dies entspricht zwei kritischen Drehzahlen.

Die Aufgabe enthält also alle wesentlichen Gedanken; sie ist aber so einfach abgefaßt, daß sie leicht nachgerechnet werden kann.

Tabelle 4. *Daten der Teile des Gehäuseblocks 1—2*

Teil	m $\frac{\text{kg}}{\text{cm}}\,\text{s}^2$	s cm	$m\,s$ kg s²	$r = s_1 - s_{12}$ cm	$m\,r^2$ cm kg s²	Θ_{ae} cm kg s²	$m\,r^2 + \Theta_{ae}$ cm kg s²
a	0,011	12,1	0,1331	—32,38	11,533	1,7	13,23
b	0,032	41,5	1,3280	— 2,98	0,284	5,7	5,98
c	0,016	72,7	1,1632	28,22	12,742	2,9	15,64
Summe	0,059		2,6243				34,85

Zur Reduktion der Gehäuse a, b und c auf die beiden Massen *1* und *2* wird die Tabelle 4 aufgestellt. Darin bedeuten s (cm) die einzelnen Schwerpunktsabstände von einer Bezugsebene, und S_{12} ist der Abstand des Gesamtschwerpunktes von der gleichen Bezugsebene. Ferner ist r der Abstand der einzelnen Schwerpunkte vom gesamten Schwerpunkt S_{12}. Wie in Ziff. 5 beschrieben, werden nun die Massen m_1 und m_2 und die Länge a_1 berechnet. Die Länge a_2 wurde zu 30 cm angenommen.

$$s_{12} = \frac{\sum m\, s}{\sum m} = \frac{2{,}624^{\cdot}3}{0{,}059} = 44{,}48 \text{ cm} .$$

Die Anwendung der Formeln (48) mit $a_2 = 30$ cm ergibt

$$m_2 = \frac{1}{\frac{1}{0{,}059} + \frac{900}{34{,}85}} = 0{,}0234 \ \frac{\text{kg}}{\text{cm}}\, s^2 ,$$

$$m_1 = 0{,}059 - 0{,}0234 = 0{,}0356 \ \frac{\text{kg}}{\text{cm}}\, s^2 ,$$

$$a_1 = \frac{0{,}023^{\cdot}4}{0{,}035^{\cdot}6}\, 30 = 19{,}72 \text{ cm} .$$

Tabelle 5. *Daten der Punkte 3 und 4*

Bezeichnung	m kg/cm s^2	s cm	Θ_{st} cm kg s^2
3	0,025	43,3	2,1
4	0,020	104,7	0

Die Lage der Punkte *1* bis *4* ist in Abb. 7 aufgezeichnet. Daraus folgt

$$l_{12} = 49{,}72, \qquad l_{23} = 31{,}18,$$
$$l_{13} = 18{,}54, \qquad l_{24} = 30{,}22,$$
$$l_{14} = 79{,}94,$$

$$\frac{l_{13}}{l_{12}} = 0{,}373 , \quad \frac{l_{23}}{l_{12}} = 0{,}627 , \quad \frac{m_3}{m_1} = 0{,}702 , \quad \frac{m_3}{m_2} = 1{,}068 ,$$
$$\frac{l_{14}}{l_{12}} = 1{,}608 , \quad \frac{l_{24}}{l_{12}} = 0{,}608 , \quad \frac{m_4}{m_1} = 0{,}562 , \quad \frac{m_4}{m_2} = 0{,}855 ,$$
$$\frac{1}{l_{12}} = 0{,}020 , \quad \frac{\Theta_3}{m_1} = 58{,}988 , \quad \frac{\Theta_4}{m_2} = 89{,}744 .$$

Die Matrix $\mathfrak{R}$ errechnet sich nach dem Ausdruck auf Tabelle 3b:

$$\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{l_{23}}{l_{12}} & \frac{l_{13}}{l_{12}} \\ -\frac{l_{24}}{l_{12}} & \frac{l_{14}}{l_{12}} \\ -\frac{1}{l_{12}} & \frac{1}{l_{12}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{l_{23}}{l_{12}}\frac{m_3}{m_1} & -\frac{l_{24}}{l_{12}}\frac{m_4}{m_1} & \frac{1}{l_{12}}\frac{\Theta_3}{m_1} \\ \frac{l_{13}}{l_{12}}\frac{m_3}{m_2} & \frac{l_{14}}{l_{12}}\frac{m_4}{m_2} & -\frac{1}{l_{12}}\frac{\Theta_4}{m_2} \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}627 & 0{,}373 \\ -0{,}608 & 1{,}608 \\ -0{,}020 & 0{,}020 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}440 & -0{,}342 & 1{,}180 \\ 0{,}398 & 1{,}375 & -1{,}795 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}424 & 0{,}298 & 0{,}070 \\ 0{,}372 & 3{,}419 & -3{,}604 \\ 0 & 0{,}034 & 0{,}940 \end{pmatrix}.$$

Die Kehrmatrix $\mathfrak{R}^{-1}$ ist

$$\mathfrak{R}^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}717^{\cdot}9 & -0{,}059^{\cdot}7 & -0{,}282^{\cdot}6 \\ -0{,}075^{\cdot}2 & 0{,}288^{\cdot}0 & 1{,}109^{\cdot}8 \\ 0{,}002^{\cdot}7 & -0{,}010^{\cdot}5 & 1{,}023^{\cdot}7 \end{pmatrix}.$$

Die Massenmatrix $\mathfrak{M}$ ist

$$\mathfrak{M}_{3,4} = \begin{pmatrix} 0{,}025 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}020 & 0 \\ 0 & 0 & -2{,}100 \end{pmatrix}.$$

Es sind folgende Einflußzahlen gegeben:

$$\alpha_{55} = 14{,}5 \cdot 10^{-6}\,\frac{\text{cm}}{\text{kg}}, \qquad \alpha_{66} = 7{,}6 \cdot 10^{-6}\,\frac{\text{cm}}{\text{kg}}, \qquad \alpha_{44} = 51 \cdot 10^{-6}\,\frac{\text{cm}}{\text{kg}}.$$

Nach dem Schema Abb. 8 werden die Einflußzahlen für den Punkt 3 berechnet:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{33} & \gamma_{33} \\ \gamma_{33} & \beta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{l_{36}}{l_{56}} & \frac{l_{35}}{l_{56}} \\ -\frac{1}{l_{56}} & \frac{1}{l_{56}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{55} & 0 \\ 0 & \alpha_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{l_{36}}{l_{56}} & -\frac{1}{l_{56}} \\ \frac{l_{35}}{l_{56}} & \frac{1}{l_{56}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{24}{52} & \frac{28}{52} \\ -\frac{1}{52} & \frac{1}{52} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14{,}5 & 0 \\ 0 & 7{,}6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{24}{52} & -\frac{1}{52} \\ \frac{28}{52} & \frac{1}{52} \end{pmatrix} 10^{-6} = \begin{pmatrix} 5{,}291\,6 & -0{,}050\,0 \\ -0{,}050\,0 & 0{,}008\,2 \end{pmatrix} 10^{-6}.$$

Setzt man in der Elastizitätsmatrix den Punkt 4 anschließend an den Punkt 3, und bringt man die Koordinate φ_3 zuletzt, so ergibt sich die Matrix

$$\mathfrak{A}_{3,4} = \begin{pmatrix} 5{,}2916 & 0 & -0{,}0500 \\ 0 & 51 & 0 \\ -0{,}0500 & 0 & 0{,}0082 \end{pmatrix} 10^{-6}.$$

Die Ausgangsmatrix für die Eigenwertbestimmung ist

$$\mathfrak{R}^{-1}\,\mathfrak{A}_{3,4}\,\mathfrak{M}_{3,4} = \begin{pmatrix} 0{,}09532 & -0{,}06089 & 0{,}08024 \\ -0{,}01128 & 0{,}29376 & -0{,}02698 \\ -0{,}00087 & -0{,}01071 & -0{,}01732 \end{pmatrix} 10^{-6}.$$

Es ergeben sich folgende Eigenwerte und Eigenvektoren:

$$\lambda_{\mathrm{I}} = 0{,}298\,19 \qquad \lambda_{\mathrm{II}} = 0{,}090\,97 \qquad \lambda_{\mathrm{III}} = -0{,}016\,1$$

$$\omega_{\mathrm{I}}^2 = 3{,}353 \cdot 10^6 \qquad \omega_{\mathrm{II}}^2 = 10{,}992\,6 \cdot 10^6$$

$$\omega_{\mathrm{I}} = 1831\ 1/s \qquad \omega_{\mathrm{II}} = 3\,316\ 1/s$$

$$\begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}_{\mathrm{I}} = \begin{pmatrix} -0{,}313\,1 \\ 1{,}000\,0 \\ -0{,}033\,1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}_{\mathrm{II}} = \begin{pmatrix} 18{,}555 \\ 1{,}000 \\ -0{,}248 \end{pmatrix}$$

Die Errechnung der Koordinaten y_1 und y_2 ergibt nach Gleichung (40)

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_{\mathrm{I,\,II}} = -\begin{pmatrix} \frac{l_{23}}{l_{12}}\frac{m_3}{m_1} & -\frac{l_{24}}{l_{12}}\frac{m_4}{m_1} & \frac{1}{l_{12}}\frac{\Theta_3}{m_1} \\ \frac{l_{13}}{l_{12}}\frac{m_3}{m_2} & \frac{l_{14}}{l_{12}}\frac{m_4}{m_2} & -\frac{1}{l_{12}}\frac{\Theta_3}{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \\ \varphi_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0{,}440 & -0{,}342 & 1{,}180 \\ 0{,}398 & 1{,}375 & -1{,}795 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0{,}313\,1 \\ 1{,}000\,0 \\ -0{,}033\,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}518\,8 \\ -1{,}309\,8 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0{,}440 & -0{,}342 & 1{,}180 \\ 0{,}398 & 1{,}375 & -1{,}795 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18{,}555 \\ 1{,}000 \\ -0{,}248 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7{,}529 \\ -9{,}205 \end{pmatrix}.$$

Die Schwingungsformen sind in Abb. 9 aufgezeichnet. Die Probe nach Gleichung (45) und (46) ist für die Schwingungsform I:

$$(m_1 \quad m_2 \quad m_3 \quad m_4 \quad 0)\,\mathfrak{y}_{\mathrm{I}} = 0$$

$$(0{,}035.6 \quad 0{,}023.4 \quad 0{,}0250 \quad 0{,}0200 \quad 0)\begin{pmatrix} 0{,}518'8 \\ -1{,}309'8 \\ -0{,}313'1 \\ 1{,}000'0 \\ -0{,}033'1 \end{pmatrix} = 0{,}000'008 \approx 0\,,$$

$$(0 \quad m_2 l_{12} \quad m_3 l_{13} \quad m_4 l_{14} \quad -\Theta_3)\,\mathfrak{y}_{\mathrm{I}} = 0\,.$$

$$(0 \quad 1{,}163'4 \quad 0{,}463'5 \quad 1{,}598'8 \quad -2{,}100'0)\begin{pmatrix} 0{,}518'8 \\ -1{,}309'8 \\ -0{,}313'1 \\ 1{,}000'0 \\ -0{,}033'1 \end{pmatrix} = 0{,}000'63 \approx 0\,,$$

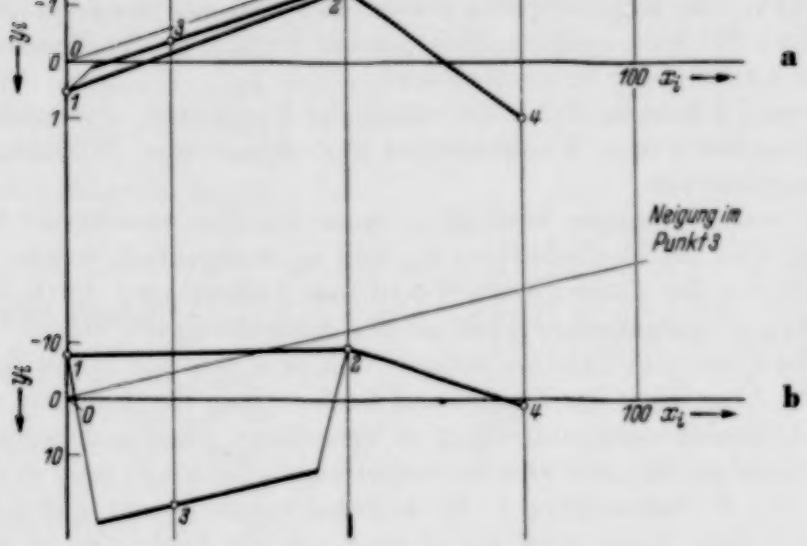

Abb. 9. a) Beispiel: Schwingungsform I; b) Beispiel: Schwingungsform II.

für die Schwingungsform II

$$(0{,}035'6 \quad 0{,}023'4 \quad 0{,}025'0 \quad 0{,}020'0 \quad 0)\begin{pmatrix} -7{,}529 \\ -9{,}205 \\ 18{,}555 \\ 1{,}000 \\ -0{,}248 \end{pmatrix} = 0{,}000'44 \approx 0\,,$$

$$(0 \quad 1{,}163'4 \quad 0{,}463'5 \quad 1{,}598'8 \quad -2{,}100'0)\begin{pmatrix} -7{,}529 \\ -9{,}205 \\ 18{,}555 \\ 1{,}000 \\ -0{,}248 \end{pmatrix} = 0{,}0107 \approx 0\,.$$

Die auf Seite 490 des Buches von *Zurmühl*[1] erwähnte Bedingung der Orthogonalität kann auch hier zur Kontrolle der Schwingungsformen I und II angewandt werden:

$$\mathfrak{y}_{\mathrm{I}}'\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{y}_{\mathrm{II}} = 0\,,$$

[1] Siehe Fußnote 1 auf Seite 40.

also

$$(0{,}518\,8 \quad -1{,}309\,8 \quad -0{,}313\,1 \quad 1{,}000\,0 \quad -0{,}033\,1) \begin{pmatrix} 0{,}035\,6 & & & & 0 \\ & 0{,}023\,4 & & & \\ & & 0{,}025\,0 & & \\ & & & 0{,}020\,0 & \\ 0 & & & & -2{,}100\,0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7{,}529 \\ -9{,}205 \\ 18{,}555 \\ 1{,}000 \\ -0{,}248 \end{pmatrix} = 0{,}000\,505 \approx 0 \,.$$

Es soll noch eine Eigenart des Systems, das als frei im Raum betrachtet wird, untersucht werden. Läßt man die Masse *3* mit ihren beiden Koordinaten zu null werden, so hat man ein Dreimassensystem frei im Raum mit einem Freiheitsgrad. Das Quadrat der Eigenschwingungszahl ist

$$\omega^2 = \left[1 + \left(\frac{l_{24}}{l_{12}}\right)^2 \frac{m_4}{m_1} + \left(\frac{l_{14}}{l_{12}}\right)^2 \frac{m_4}{m_2}\right] \frac{1}{\alpha_{44}\, m_4} \,. \tag{49}$$

Wären die Punkte *1* und *2* fest, so hätte man gehabt

$$\omega^2 = \frac{1}{\alpha_{44}\, m_4} \,. \tag{50}$$

Da alle Ausdrücke in der eckigen Klammer der Gleichung (49) nur positiv sein können, ist der Wert für ω^2 in Gleichung (49) auf alle Fälle größer als in Gleichung (50). In dem vorliegenden Beispiel ist der Wert des Ausdrucks in der eckigen Klammer gleich 3,419. Die Eigenfrequenz erhöht sich also auf das 1,85fache.

Streicht man die Koordinaten φ_3 und y_4, so erhält man für die Masse 3 den Wert der eckigen Klammer in (49): 1,424. Die Eigenfrequenz erhöht sich also auf das 1,20fache. Es ist damit bewiesen, daß man schon für eine einigermaßen genaue Rechnung die Maschine als Ganzes unter Berücksichtigung der Aufhängung betrachten muß.

Die Schwingungsform I kommt durch die elastische Verformung von nicht rotierenden Teilen zustande. Bei einigermaßen gutem Wuchtzustand der umlaufenden Teile ist die zu ihr gehörende kritische Drehzahl ungefährlich.

Die Schwingungsform II dagegen besteht in einer starken Auslenkung des Trommelläufers. Für diese Schwingung sind die Einflußzahlen α_{55} und α_{66} maßgebend, welche, wie schon erwähnt, alle Weichheiten zwischen der Läufertrommel und den Außenringen der Gehäuse darstellen. Je größer nun der Anteil der umlaufenden Teile an der Auslenkung ist, um so weniger gedämpft ist die Schwingung. Wenn also die Gehäuse relativ steif sind und die Auslenkung des Läufers im wesentlichen durch die Elastizität der Zapfen und Endscheiben der Trommel zustande kommt, ist die Schwingung im Drehzahlbereich unbedingt zu vermeiden. Stellen dagegen die Zahlen α_{55} und α_{66} die Weichheit der Gehäuse dar, sind also die umlaufenden Teile sehr steif, so ist die Schwingung II ebenso ungefährlich wie die Schwingung I. Es ist dabei vorausgesetzt, daß die Abstände zwischen den Schaufelenden und dem Stetor groß genug sind, um ein Anstreifen in der Resonanz zu vermeiden.

(Eingegangen am 27. März 1958.)

Anschrift des Verfassers: Dipl.-Ing. *Berthold Jäger*, Stuttgart-Wangen, Kemptenerstr. 22.

Die Beschleunigungsänderung

I. Mitteilung

Von W. Meyer zur Capellen

1. Einleitung. Will man für das geradgeführte Abtriebsglied eines Getriebes die Extrema der Beschleunigungen b ermitteln, so findet man zunächst die zugehörige Winkelstellung α des Antriebsgliedes, wenn man die Beschleunigungsänderung db/dt gleich Null setzt. In gleicher Weise wird man auch bei drehendem Abtrieb verfahren. Hierzu bedarf man aber nicht der Beschleunigungsänderung eines einzelnen Punktes sondern der des ganzen Getriebes, d. h. es wird notwendig sein, die Größe allgemein bei der ebenen Bewegung zu definieren. Da die dritte Ableitung des Weges nach der Zeit auch, wohl zuerst von *Melchior*, als Ruck bezeichnet worden ist[1], wollen wir uns, auch wegen der Kürze des Ausdruckes, dieses Wortes bedienen, und unsere Aufgabe sei, Sätze über den Ruck $\mathfrak{R} = d\mathfrak{b}/dt$ aufzustellen und diese auf die Ermittlung der Beschleunigungsextrema in Getrieben anzuwenden.

In der Getriebetechnik wird beiläufig auch der Ruck für einen anderen Fragenkomplex verwendet: Ein Getriebe ist stoßfrei, wenn keine Sprünge im Geschwindigkeitsverlauf auftreten, also die Beschleunigung nicht unendlich wird, und es ist ruckfrei, wenn keine Sprünge im Beschleunigungsverlauf auftreten, also die dritte Ableitung (hier der Ruck) nicht unendlich wird.

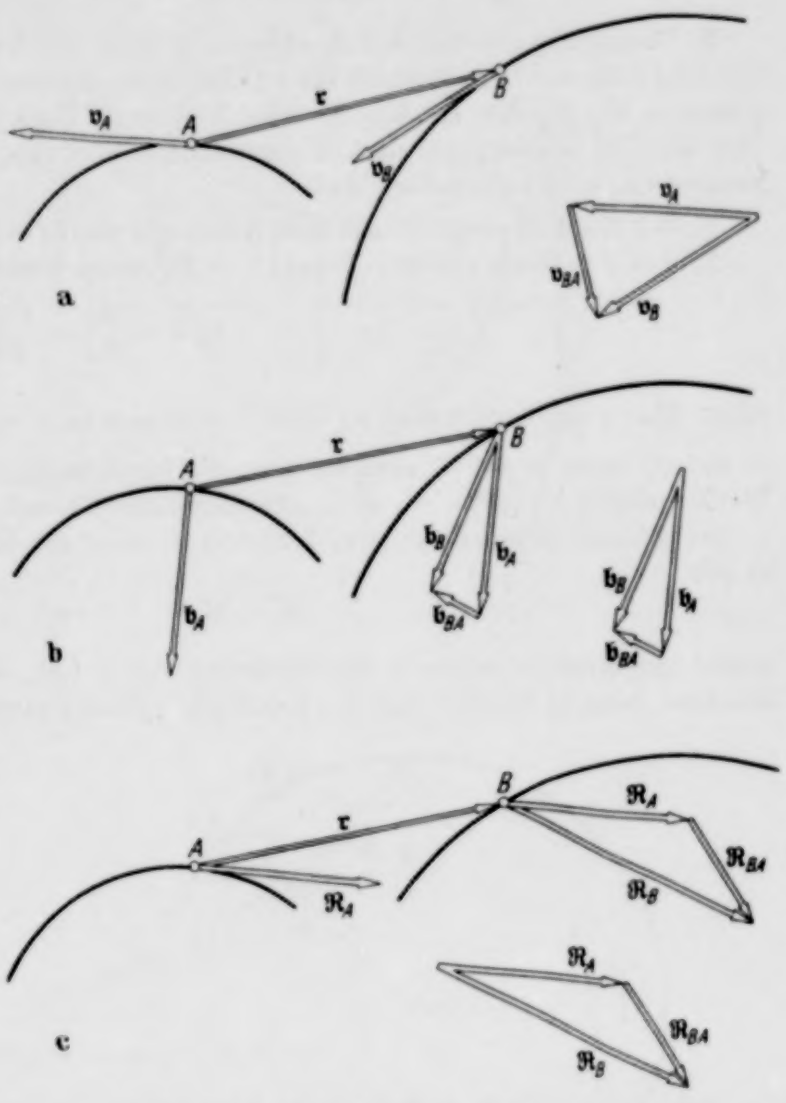

Abb. 1. Der Satz von *Euler* am Beispiel einer Zweipunktführung
a) für die Geschwindigkeiten, b) für die Beschleunigungen, c) für den Ruck.

I. Schiebung und Drehung

2. Erweiterung des Satzes von *Euler* auf den Ruck. Ist die Bewegung eines Getriebegliedes durch die zweier Punkte A und B gegeben, und haben A und B die Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_A$, $\mathfrak{v}_B$ bzw. die Beschleunigungen $\mathfrak{b}_A$ und $\mathfrak{b}_B$, so gilt (Abb. 1a) nach dem Satz von *Euler* mit $AB = \mathfrak{r}$ einerseits

$$\mathfrak{v}_B \equiv \mathfrak{v} = \mathfrak{v}_A + \mathfrak{v}_{BA} = \mathfrak{v}_A + \bar{\omega} \times \mathfrak{r}\,, \qquad (1a)$$

andrerseits, durch Differentiation gewonnen,

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}_B \equiv \mathfrak{b} &= \mathfrak{b}_A + \mathfrak{b}_{tBA} + \mathfrak{b}_{nBA} \\ &= \mathfrak{b}_A + \bar{\varepsilon} \times \mathfrak{r} - \mathfrak{r}\,\omega^2\,, \end{aligned} \qquad (1b)$$

wobei $\bar{\omega}$ und $\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} = d\bar{\omega}/dt$ (Punkte bedeuten Ableitungen nach der Zeit) die momentane Winkelgeschwindigkeit bzw. — Beschleunigung darstellen (Abb. 1b). Differentiiert man nun diese Gleichung nach der Zeit t, so folgt

$$\dot{\mathfrak{b}} = \dot{\mathfrak{b}}_A + \dot{\bar{\varepsilon}} \times \mathfrak{r} + \bar{\varepsilon} \times \dot{\mathfrak{r}} - \dot{\mathfrak{r}}\,\omega^2 - 2\,\mathfrak{r}\,\varepsilon\,\omega \qquad (2a)$$

[1] *P. Melchior*, Z.VDI. 72 (1928) S. 1842; ferner *H. Finkelnburg*, Maschinenbau/Betrieb 1935, Beilage Reuleaux-Mitteilung, S. 520; ferner Zuschriften von *H. Blaise*, *F. Maul* und Entgegnung *H. Finkelnburg*, Maschinenbau/Betrieb 1936, Reuleaux-Mitteilungen S. 220. — Dem Vorschlag von H. Blaise, die Größe db/dt „Schwellung" zu nennen, kann ich mich aus sprachlichen Gründen nicht anschließen, da zusammengesetzte Ausdrücke wie „Polschwellung" und „Schwellungspol" unschön wirken gegenüber „Polruck" und „Ruckpol" (vgl. u.).

oder, da $\dot{\mathfrak{t}} = \bar{\omega} \times \mathfrak{r}$ und $\bar{\varepsilon} \times \dot{\mathfrak{t}} = -\mathfrak{r}\,\omega\,\varepsilon$ ist, auch mit $\dot{\mathfrak{b}} = \mathfrak{R}$

$$\mathfrak{R}_B \equiv \mathfrak{R} = \mathfrak{R}_A + \mathfrak{R}_{BA} = \mathfrak{R}_A + \mathfrak{R}_{tBA} + \mathfrak{R}_{nBA}\,. \tag{2b}$$

Hierin ist $\mathfrak{R}_A = \dot{\mathfrak{b}}_A$ und sind $\mathfrak{R}_{tBA}$, $\mathfrak{R}_{nBA}$ die Komponenten des Ruckes $\mathfrak{R}_{BA}$ von B gegen A in normaler Richtung bzw. tangentialer Richtung. Für diese Komponenten gilt

$$\mathfrak{R}_{tBA} = \dot{\bar{\varepsilon}} \times \mathfrak{r} - \mathfrak{t}\,r\,\omega^3 = \dot{\bar{\varepsilon}} \times \mathfrak{r} - \omega^2\,\mathfrak{v}_{BA}\,, \tag{3a}$$

worin $\mathfrak{t}$ den Einheitsvektor in Richtung $\mathfrak{v}_{BA}$ darstellt, und wonach der Betrag von $\mathfrak{R}_{tBA}$ den Wert

$$R_{tBA} = r\,(\dot{\varepsilon} - \omega^3) = r\,\dot{\varepsilon} - v_{BA}\,\omega^2 \tag{3b}$$

hat, ferner

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{nBA} &= -\,3\,\omega\,\varepsilon\,\mathfrak{r}\,, \\ R_{nBA} &= 3\,\omega\,\varepsilon\,r = 3\,v_{BA}\,\varepsilon\,. \end{aligned} \tag{3c}$$

(Abb. 1c). Für den Fall eines Extremums von ε reduziert sich, da dann $\dot{\varepsilon}$ verschwindet, die Tangentialkomponente R_{tBA} auf $R_{tBA} = -\,r\omega^3$.

3. Bahnkomponenten des Ruckes. a) Reine Drehung. Bei reiner Drehung ist der Punkt A fest und fällt mit dem Drehpunkt 0 (Abb. 2) zusammen, d. h. es wird $\mathfrak{R}_A$ gleich Null und die Komponenten $\mathfrak{R}_t$, $\mathfrak{R}_n$ des Ruckes $\mathfrak{R}$ eines bewegten Punktes stimmen dann unmittelbar mit den in (3a) bis (3c) wiedergegebenen Komponenten überein. Setzt man die Komponenten geometrisch zusammen, so erhellt sofort, daß

1) der Ruck R proportional dem Abstand r des bewegten Punktes vom Drehpunkt ist, und
2) daß der Ruck mit dem Strahl $r = BO$ einen konstanten Winkel $\varkappa$ bildet, welcher aus

$$\operatorname{tg}\varkappa = \frac{R_t}{R_n} = \frac{\dot{\varepsilon} - \omega^3}{3\,\omega\,\varepsilon} \tag{4}$$

folgt. Hat ε ein Extremum, so wird $\dot{\varepsilon} = 0$, also $\operatorname{tg}\varkappa = -\omega^2/3\,\varepsilon$, d. h. es gilt $\operatorname{tg}\left(\varkappa + \frac{\pi}{2}\right) = 3\operatorname{tg}\psi = 3\,\varepsilon/\omega^2$, wenn ψ der Winkel ist, den die Beschleunigung $\mathfrak{b}$ mit dem Strahl BO bildet (vgl. 4a). Wenn zufällig $\dot{\varepsilon} = \omega^3$ wird, so ist der Ruck nur normal gerichtet.

Ist schließlich ω konstant, d. h. $\varepsilon = 0$, so ist der Ruck nur noch tangential gerichtet, d. h. es gilt

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_t = -\,\mathfrak{t}\,r\,\omega^3 = -\,\mathfrak{v}\,\omega^2\,, \tag{5}$$

wobei der Einheitsvektor $\mathfrak{t}$ die Richtung von $\mathfrak{v}$ hat, d. h. $\mathfrak{R}$ ist entgegengesetzt zu $\mathfrak{v}$ gerichtet. Zeichnet man in diesem Fall die Geschwindigkeit v gleich dem Kurbelhalbmesser, d. h. setzt man

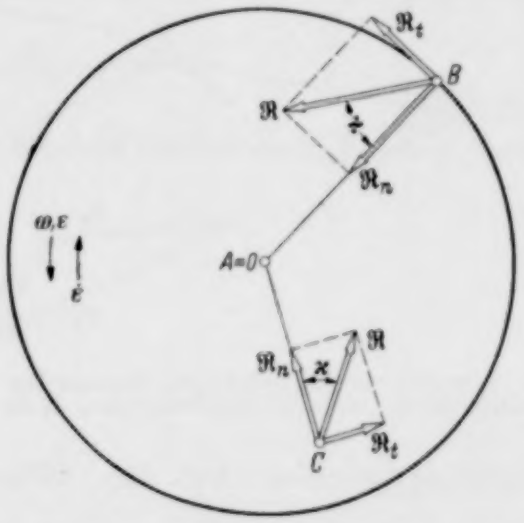

Abb. 2. Der Ruck bei beschleunigter Kreisbewegung ($\dot{\varepsilon} \neq 0$).

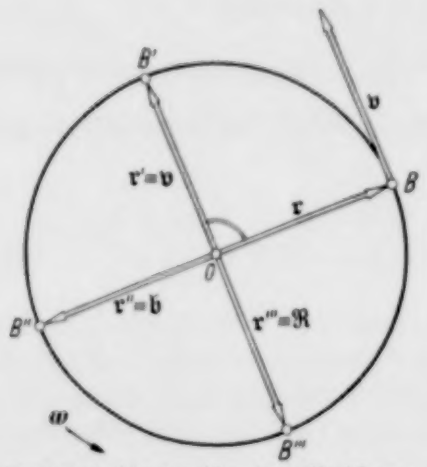

Abb. 3. Der Ruck bei nicht beschleunigter Kreisbewegung ($\varepsilon = 0$).

ω gleich 1 (was bei kinematischen Konstruktionen immer gern gemacht wird), so ist auch $\mathfrak{v}$ gleich dem Vektor $\mathfrak{r}' = \overrightarrow{OB'}$ (Abb. 3), der senkrecht zum Vektor $\mathfrak{r} = OB$ steht. Infolgedessen stellt der Vektor $\mathfrak{r}'' = \overrightarrow{OB''}$, welcher wiederum senkrecht zu $\mathfrak{r}'$ steht, die Beschleunigung $\mathfrak{b}$ des Punktes B

(oder die Geschwindigkeit des Punktes B') dar[1] und schließlich der nochmals um 90° gedrehte Vektor $\mathfrak{r}''' = OB'''$ den Ruck $\Re$ dar (vgl. Ziff. 4).

Ist ω nicht konstant, aber ε gerade gleich Null, d. h. hat ω ein Extremum, so existieren auch nur die Tangentialkomponenten mit den angegebenen Werten $R_t = v\,(\dot{\varepsilon} - \omega^3)$.

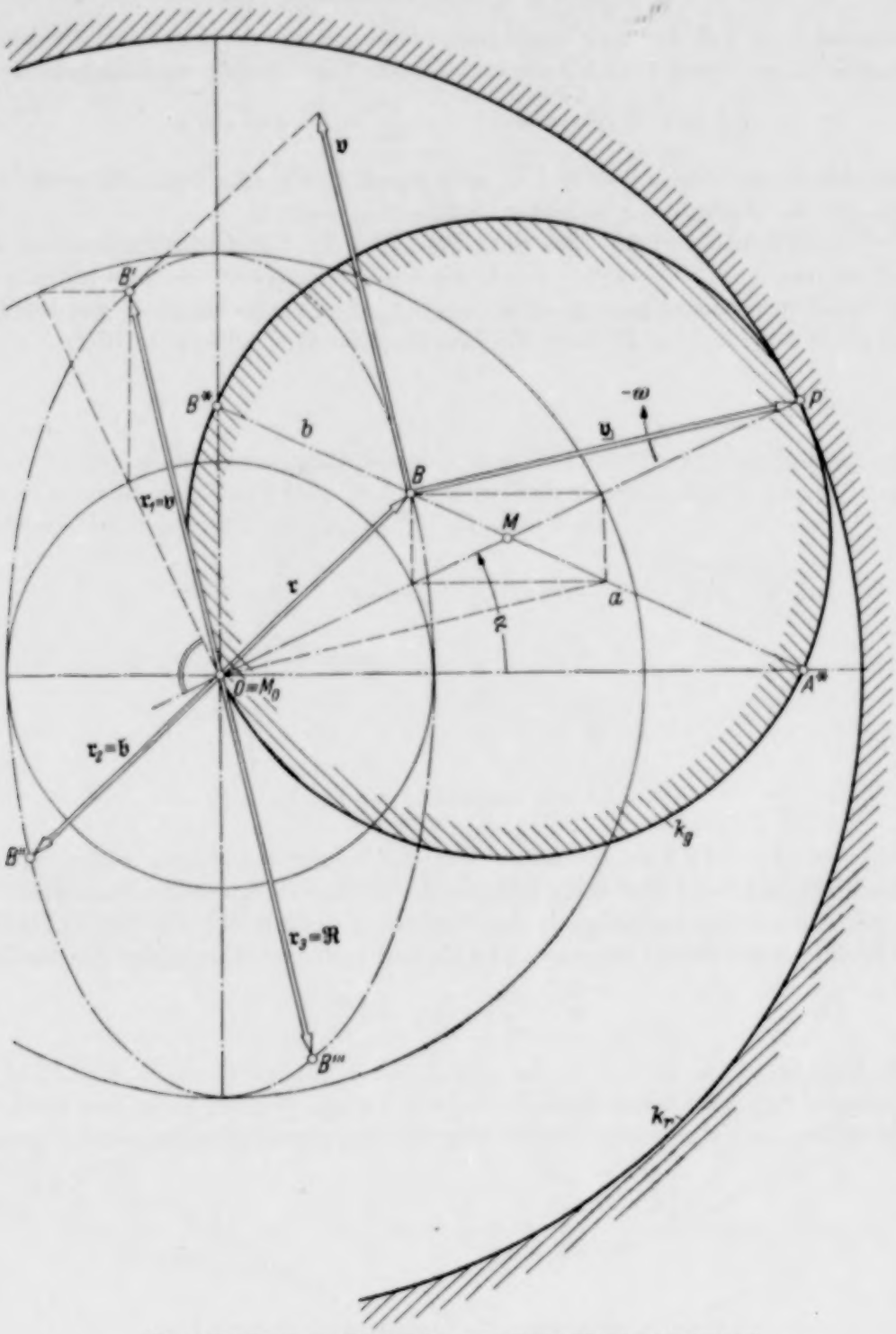

Abb. 4. Der Ruck am elliptisch bewegten Punkt (Kardankreispaar)

Auch wenn der Ausschlagwinkel (z. B. in der Totlage einer Kurbelschwinge ein Extremum hat, also ω momentan verschwindet, existieren nur Tangentialkomponenten des Ruckes. Für diesen gilt dann

$$R_t = r\,\dot{\varepsilon}\,.$$

b) Sonderfall einer elliptischen Bahn. Bei einer Kreisbahn bewegt sich ein Punkt nach dem Gesetz $x = a\cos\alpha$, $y = a\sin\alpha$ mit $\alpha = \omega t$ (ω = konst.) und a als Halbmesser des Kreises. Bei einer elliptischen Bahn (Abb. 4) möge diese entsprechend durch die Gleichungen

$$x = b\cos\alpha\,, \qquad y = a\sin\alpha$$

[1] Der Hodograph ist wieder ein Kreis, und die Geschwindigkeit, mit welcher die Geschwindigkeitsspitzen wandern, ist die Beschleunigung. Ebenso wie die Beschleunigung bei konstanter Winkelgeschwindigkeit einen konstanten Betrag hat, ist auch der Ruckbetrag konstant, wie auch dort im Gegensatz zum Sprachgebrauch des täglichen Lebens.

gegeben sein, wobei a die große und b die kleine Halbachse darstellen (und wobei α als Kurbelwinkel in dem zugehörigen Kardangetriebe gedeutet werden kann).

Da $dx/dt = -b\,\omega \sin\alpha$ und $dy/dt = a\,\omega\cos\alpha$ gilt, so ist die Geschwindigkeit v durch

$$v^2 = (b^2\sin^2\alpha + a^2\cos^2\alpha)\,\omega^2 = r_1^2\omega^2$$

gegeben. Hierin ist $r_1 = OB'$ der zu r konjugierte Halbmesser; denn man erhält diesen, wenn man in der Ellipsengleichung α durch $\alpha + \pi/2$ ersetzt. Für die Beschleunigungskomponenten folgt ähnlich

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -b\,\omega^2\cos\alpha\,, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -a\,\omega^2\sin\alpha\,,$$

so daß die Beschleunigung durch $\mathfrak{b} = -\mathfrak{r}\,\omega^2$ oder durch $b = r_2\omega^2$ dargestellt wird, wobei r_2 den zu $OB' = r_1$ konjugierten Halbmesser bedeutet. Schließlich stellt $\mathfrak{R} = -\mathfrak{r}_1\omega^3 = \mathfrak{r}_3\omega^3$ den Ruck dar, wobei wieder r_3 zu r_2 konjugiert ist. Zeichnet man nun die Geschwindigkeiten so, daß $\omega = 1$ ist, so stellen die Vektoren $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2 = -\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}_3 = -\mathfrak{r}_1$ die Geschwindigkeit, die Beschleunigung, den Ruck dar (Abb. 4). Bei dieser Zentralbewegung ist auch $\mathfrak{r}_2$ die Geschwindigkeit des Punktes B' und $\mathfrak{r}_3$ die Geschwindigkeit des Punktes B'' oder die Beschleunigung des Punktes B'.

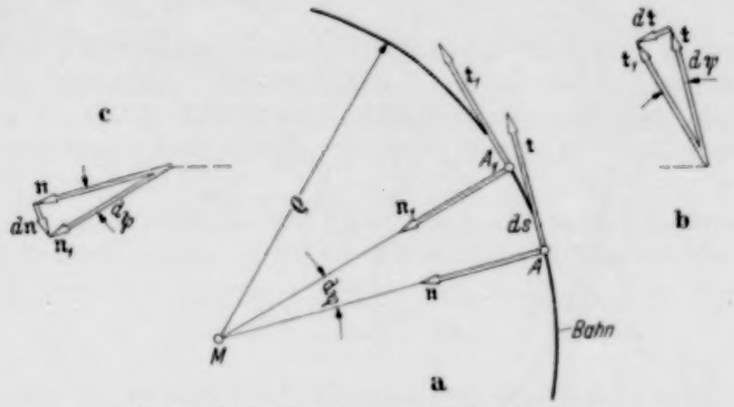

Abb. 5. Die Einheitsvektoren an einer beliebigen Bahn.

c) Beliebige Bahn. 1) *Komponenten*: Um bei einer beliebigen Bahn die Ruckkomponenten zu ermitteln, sei von der Entwicklung der Beschleunigungskomponenten ausgegangen. Nach Abb. 5a gilt für die Geschwindigkeit des Punktes A doch $\mathfrak{v} = \mathfrak{t}\,v = \mathfrak{t}\,ds/dt$, wobei $\mathfrak{t}$ den Einheitsvektor in Richtung der Bahntangente und t die Zeit bedeutet. Dann folgt für die Beschleunigung

$$b = \frac{dv}{dt} = \frac{d\mathfrak{t}}{dt}\,v + \mathfrak{t}\,\frac{dv}{dt}\,,$$

oder da nach Abb. 5b doch $d\mathfrak{t} = \mathfrak{n}\,d\varphi$ ist mit $\mathfrak{n}$ als Einheitsvektor in Richtung der Normale (zum Krümmungsmittelpunkt hingerichtet) und mit $d\varphi$ als Winkel zwischen zwei unendlich benachbarten Normalen, so folgt unter Einführung des Krümmungshalbmessers ϱ gemäß $\varrho\,d\varphi = ds$ auch

$$\frac{d\mathfrak{t}}{dt} = \mathfrak{n}\,\frac{d\varphi}{dt} = \mathfrak{n}\,\frac{v}{\varrho}\,,$$

also

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{t}\,b_t + \mathfrak{n}\,\frac{v^2}{\varrho} = \mathfrak{b}_t + \mathfrak{b}_n\,, \tag{6}$$

mit

$$|\mathfrak{b}_t| = b_t = dv/dt\,,$$
$$|\mathfrak{b}_n| = v^2/\varrho$$

in bekannter Weise. Die Differentiation von $\mathfrak{b}$ aus (6) liefert dann den Ruck. Hierbei tritt der Vektor $d\mathfrak{n}$ auf, und für diesen ergibt sich gemäß Abb. 5c doch

$$d\mathfrak{n} = -\mathfrak{t}\,d\varphi = -\mathfrak{t}\,\frac{ds}{\varrho}$$

und

$$\frac{d\mathfrak{n}}{dt} = -\mathfrak{t}\,\frac{v}{\varrho}\,.$$

Damit erhält man

$$\Re = \frac{d\mathfrak{b}}{dt} = \frac{d\mathfrak{n}}{dt}\,\frac{v^2}{\varrho} + \mathfrak{n}\left(\frac{2\,v\,b_t}{\varrho} - \frac{v^2\,\dot{\varrho}}{\varrho^2}\right) + \frac{dt}{dt}\,\boldsymbol{b}_t + \mathfrak{t}\cdot\frac{db_t}{dt}$$

oder schließlich auch

$$\Re = \Re_t + \Re_n = \mathfrak{t}\cdot R_t + \mathfrak{n}\cdot R_n \,, \tag{7a}$$

wobei

$$R_t = \frac{db_t}{dt} - \frac{v^3}{\varrho^2} = \frac{d^2v}{dt^2} - \frac{v^3}{\varrho^2} = \frac{d^3s}{dt^3} - \frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^3, \tag{7b}$$

$$R_n = 3\,b_t\,\frac{v}{\varrho} - \frac{d\varrho}{dt}\,\frac{v^2}{\varrho^2} = \frac{v}{\varrho}\left(3\,b_t - \frac{v}{\varrho}\,\frac{d\varrho}{dt}\right) \tag{7c}$$

ist. Wenn $\varrho = \text{konst.}$, so ergeben sich die Werte wie beim Kreis bzw. die Komponenten $\Re_{tBA}$, $\Re_{nBA}$ beim Satz von Euler.

2) *Die Flächengeschwindigkeit zweiter Art.* Nun kann man den Wert für R_n noch anders schreiben; denn es gilt auch[1]

$$R_n = \frac{1}{v}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{v^3}{\varrho}\right), \tag{8a}$$

wie eine Nachrechnung leicht erkennen läßt, und dem Klammerausdruck kommt eine besondere Bedeutung zu: Im Hodographen (Abb. 6) hat der Flächensektor $d\Phi$ zwischen den (unendlich) benachbarten Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{v} + d\mathfrak{v}$ den Wert

$$d\Phi = \frac{1}{2}\,v^2\,d\psi = \frac{1}{2}\,v^2\,\frac{ds}{\varrho} = \frac{1}{2}\,\frac{v^2}{\varrho}\,ds\,.$$

Also gilt für die Flächengeschwindigkeit zweiter Art[2]

$$\dot{\Phi} = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{2}\,\frac{v^2}{\varrho}\,\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}\,\frac{v^3}{\varrho}\,, \tag{8b}$$

und somit auch[3]

$$R_n = \frac{2}{v}\,\frac{d^2\Phi}{dt^2}\,. \tag{8c}$$

Ist also $\dot{\Phi}$ konstant, so ist R_n immer gleich Null oder, wenn $\dot{\Phi}$ ein Extremum hat, momentan gleich Null (vgl. die folgende Ziff. 3).

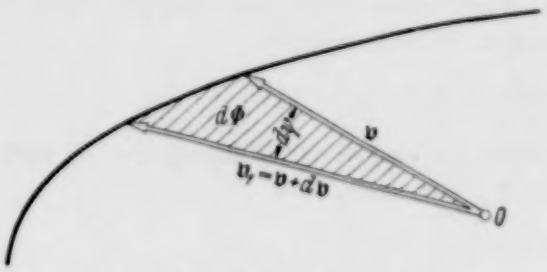

Abb. 6. Der Hodograph und die Flächengeschwindigkeit 2. Art.

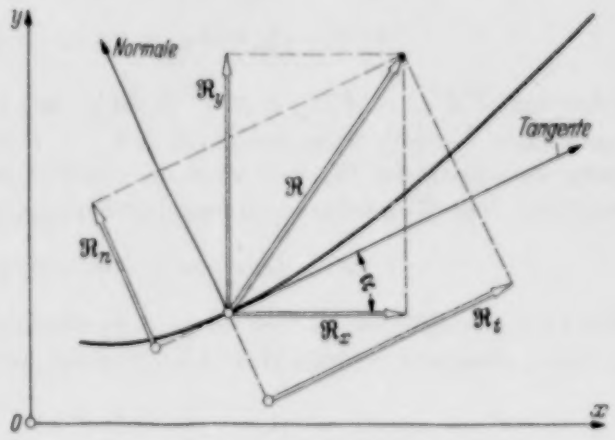

Abb. 7. Der Ruck in Komponentendarstellung im festen und bewegten Koordinatensystem.

3) *Parameterdarstellung.* Ist die Bahn eines Punktes in Parameterform, d. h. durch $x = x(t)$ und $y = y(t)$ gegeben, so sind die Komponenten des Ruckes in den Achsenrichtungen durch $R_x = \dddot{x}$, $R_y = \dddot{y}$ gegeben und die Normal- bzw. Tangentialkomponenten folgen dann gemäß Abb. 7 zu

$$R_t = R_x\cos\alpha + R_y\sin\alpha\,,$$
$$R_n = -R_x\sin\alpha + R_y\cos\alpha$$

[1] Die Dimension von R ist cm/sec³ bzw. Länge/(Zeit)³.
[2] Zur Unterscheidung von der üblichen Flächengeschwindigkeit erster Art.
[3] Es bestehen keine Schwierigkeiten, den Ruck auch durch polare Komponenten darzustellen.

oder mit $\operatorname{tg}\alpha = \dot{y}/\dot{x}$, also

$$\cos\alpha = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} = \frac{\dot{x}}{v}, \quad \sin\alpha = \frac{\dot{y}}{v}$$

auch zu

$$R_t = \frac{\dot{x}\cdot\dddot{x}+\dot{y}\cdot\dddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}, \qquad R_n = \frac{\dot{x}\cdot\dddot{y}-\dot{y}\cdot\dddot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}. \tag{9a}$$

Da bekanntlich $\varrho = \frac{v^3}{\dot{x}\cdot\ddot{y}-\dot{y}\cdot\ddot{x}}$ ist, hat die Flächengeschwindigkeit auch den Wert

$$\dot{\Phi} = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{2}(\dot{x}\cdot\ddot{y}-\dot{y}\cdot\ddot{x}), \tag{9b}$$

und Einsetzen in (8c) liefert den gleichen Wert wie in (9a).

In dem obigen Beispiel über die elliptische Bahn wird, wie leicht nachzurechnen, $\dot{\Phi} = \frac{1}{2}\,a\,b\,\omega^3$ = konst., also $R_n = 0$ wie dort bereits gefunden. Ferner wird noch ganz einfach

$$R_t = -\omega^3\sqrt{b^2\sin^2\alpha + a^2\cos^2\alpha} = -v\,\omega^2,$$

wie auch dort angegeben. Bei einer hyperbolischen Bahn gemäß $x = b\,\mathfrak{Cof}\,\omega t$, $y = a\,\mathfrak{Sin}\,\omega t$ wird ebenfalls $\dot{\Phi}$ = konst., d. h. $R_n = 0$ und beiläufig $R_t = v\,\omega^2$.

Als Beispiel für das Verschwinden von R_t sei das Gesetz

$$x = a\,t, \qquad y = c\,t^2$$

genannt (Parabel); es verschwinden $\dddot{x}$ und $\dddot{y}$, also R_t und R_n. Bedingung für das Verschwinden von R_t ist $\dot{y}\cdot\dddot{y}+\dot{x}\cdot\dddot{x} = 0$.

4. Geometrische Örter. a) Bekannte Ortskurven. Während zuletzt der Ruck auf der Bahn eines Punktes betrachtet wurde, soll nun der momentane Bewegungszustand der gesamten, zum Momentanpol P hin orientierten bewegten Ebene untersucht werden.[1] Dieser ist zunächst durch die Bresseschen Kreise, d. h. durch Wendekreis K_w und Gleichenkreis K_g, welche sich im Momentanpol P als singulärem Punkt und im Beschleunigungspol J rechtwinklig schneiden (Abb. 8a), gegeben. Da der Momentanpol als bewegter Punkt die zum Wendepol hingerichtete Beschleunigung $b_p = D\,\omega^2$ hat, so folgen für Normal- und Tangentialbeschleunigung (Abb. 8a) nach dem Satz von *Euler* die Werte

$$b_n = -b_p\sin\varphi + r\,\omega^2 = -\omega^2(D\sin\varphi - r) = -\omega^2(w-r), \tag{10a}$$

$$b_t = -b_p\cos\varphi + r\,\varepsilon = -D\,\omega^2\cos\varphi + r\,\varepsilon; \tag{10b}$$

hierbei ist $\overline{PA} = r$, $\overline{PA_w} = w = D\sin\varphi$ mit D als Wendekreisdurchmesser und stellen ω, ε die momentane Winkelgeschwindigkeit bzw. — Beschleunigung der Ebene dar. Die Normalbeschleunigung verschwindet für $r = w$, d. h. wenn A auf dem Wendekreis liegt; und verfolgt man einen Punkt auf dem Wendekreis, so hat dort b_t einen periodischen Verlauf gemäß

$$b_t = -D\,\omega^2\cos\varphi + D\,\varepsilon\sin\varphi = D\sqrt{\omega^4+\varepsilon^2}\sin(\varphi-\varphi_J),$$

wobei $\operatorname{tg}\varphi_J = \omega^2/\varepsilon$ ist, so daß für $\varphi = \varphi_J$ demnach b_t verschwindet (Beschleunigungspol J) und auf dem dazu senkrechten Strahl sein Extremum hat (Punkt Z_w) von der Größe

$$b_t = D\sqrt{\omega^4+\varepsilon^2} = \varepsilon\,\overline{WG}.$$

Die Tangentialbeschleunigung verschwindet, wenn $r = g\cos\varphi$ mit $g = D\omega^2/\varepsilon$ ist, also der Bahnpunkt auf dem Gleichenkreis liegt. Auf diesem hat wiederum b_n einen periodischen Verlauf gemäß

$$b_n = -g\sqrt{\omega^4+\varepsilon^2}\sin(\varphi-\varphi_J);$$

b_n verschwindet für $\varphi = \varphi_J$ (Beschleunigungspol) und hat auf dem dazu senkrechten Strahl (Punkt Z_g) sein Extremum von der Größe $-b_n = \overline{WG}\,\omega^2$. Im Punkt W ist beiläufig $b_t = D\,\varepsilon$ und im Punkt G entsprechend $b_n = g\,\omega^2$.

In den oben angegebenen Formeln, z. B. in (7c), kommt auch der Ausdruck $d\varrho/dt$ vor. Verschwindet dieser momentan, d. h. hat ϱ einen stationären Wert, so liegen alle solche Punkte auf der

[1] Es wird also von der Bewegung des Massenpunktes in die Ebene übergegangen zur ebenen Bewegung eines Körpers.

Kreisungspunktkurve k_u, welche im allgemeinen dadurch definiert ist, daß der betreffende Krümmungskreis mit der Bahnkurve vier unendlich benachbarte Punkte gemeinsam hat. Es werden also für die weiteren Betrachtungen die Daten dieser Kurve sowie auch die Angelpunktkurve k_a (dem Ort der zugehörigen Krümmungsmittelpunkte) eine Rolle spielen. Die Kurven haben die Gleichungen[1, 2]

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{l \sin\varphi} + \frac{1}{m \cos\varphi} \quad \text{(Kurve } k_u\text{)}, \tag{11a}$$

$$\frac{1}{r_0} = \frac{1}{l_0 \sin\varphi} + \frac{1}{m \cos\varphi} \quad \text{(Kurve } k_a\text{)}. \tag{11b}$$

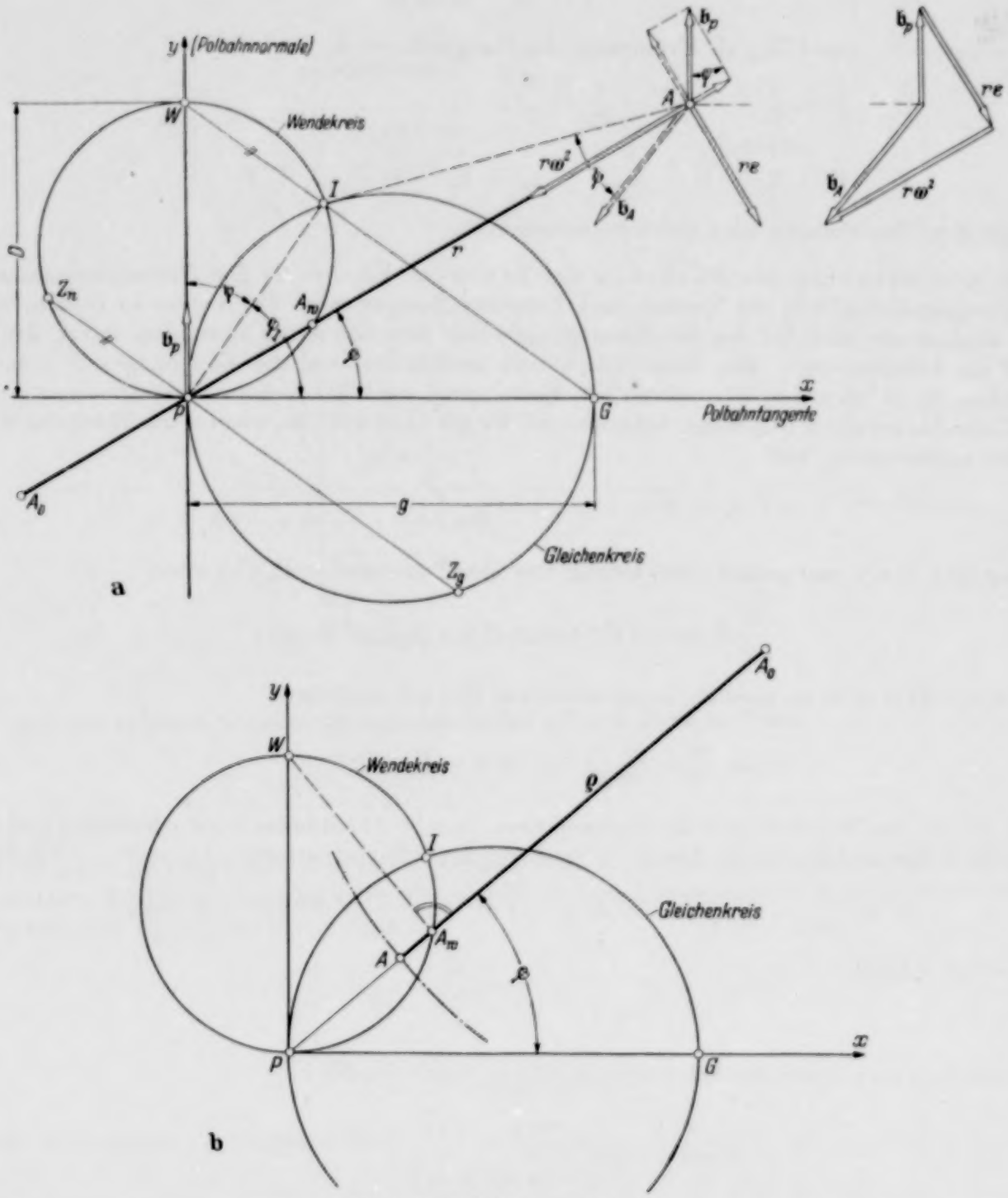

Abb. 8. Zur *Euler-Savary*schen Formel:
a) Beschleunigungen eines Punktes A der bewegten Ebene außerhalb des Wendekreises;
b) Punkt A der bewegten Ebene liegt innerhalb des Wendekreises

[1] Vgl. z. B. *R. Müller*, Einführung in die theoretische Kinematik, Berlin 1932 oder *R. Beyer*, Kinematische Getriebesynthese, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1953.
[2] *W. Meyer zur Capellen*, Ing.-Arch. 17 (1949) S. 308 sowie 25 (1957) S. 140.

Hier ist m der Durchmesser der Krümmungskreise von k_u und k_a, welche diese längs der Polbahnnormale in P berühren, während l bzw. l_0 der Durchmesser des Krümmungskreises ist, welcher k_u bzw. k_a längs der Polbahntangente in P berührt, und ist ferner

$$m = \frac{3\,\vartheta'}{\vartheta''}\,, \qquad l = \frac{3}{2\,\vartheta' + \tau'}\,, \qquad l_0 = \frac{3}{\tau' - \vartheta'}\,. \tag{12}$$

Die Striche bedeuten Ableitungen nach dem Bogenelement der Rastpolkurve k_r, und $d\vartheta$ ist die momentane Winkeldrehung der Ebene, so daß $\vartheta' = 1/D$ und $\tau' = 1/R_0 =$ Krümmung der Rastpolkurve wird. Gemäß der *Euler-Savary*schen Gleichung

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} = \frac{1}{D \sin\varphi}$$

gilt mit $\varphi = 90°$ und $1/R_{kg}$ als Krümmung der Gangpolkurve k_g

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{l} - \frac{1}{l_0} = \frac{1}{D}\,, \qquad \frac{1}{R_{kg}} - \frac{1}{R_0} = \frac{1}{D}\,, \\ &\frac{3}{l} = \frac{2}{D} + \frac{1}{R_0} = \frac{1}{D} + \frac{1}{R_{kg}}\,, \qquad \frac{3}{l_0} = \frac{1}{R_0} - \frac{1}{D} = \frac{1}{R_{kg}} - \frac{2}{D}\,. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Auf all diese Beziehungen wird gleich zurückgegriffen.

b) Komponenten des Ruckes in der bewegten Ebene. 1) *Die Normalkomponente und der Tangentialkreis.* Um die Normal- und Tangentialkomponenten des Ruckes zu finden, könnte man ähnlich wie oben bei den Beschleunigungen den Satz von *Euler* anwenden, sofern der Ruck des Poles bekannt wäre. Man kann jedoch auch unmittelbar von den Gleichungen (7b) und (7c) ausgehen, da ja bis auf $d\varrho/dt$ zunächst alle Einzelwerte, auch der Krümmungshalbmesser ϱ gemäß der *Euler-Savary*schen Gleichung, bekannt sind. Es gilt nach Abb. 8b, wenn A innerhalb des Wendekreises angenommen wird,

$$\varrho = \overline{PA_0} - \overline{PA} = r_0 - r = \frac{r^2}{D \sin\varphi - r} = \frac{r^2\,\vartheta'}{\sin\varphi - r\,\vartheta'}\,. \tag{14}$$

Ferner ist $v = r\,\omega$, und gemäß (10b) beträgt der erste Summand in R_n (7c) somit

$$\frac{3\,v}{\varrho}\,b_1 = \frac{3\,\omega}{r}\,(D \sin\varphi - r)\,(r\,\varepsilon - D\,\omega^2 \cos\varphi)\,. \tag{15a}$$

Für den Faktor $d\varrho/dt$ im zweiten Summanden von (7c) gilt zunächst

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{d\varrho}{ds}\,\frac{ds}{dt} = \varrho'(s)\,u = D\,\omega\,\varrho'(s)\,, \tag{15b}$$

wenn ds hier das Bogenelement der Rastpolkurve, Striche Ableitungen nach s bedeuten und somit ds/dt die Polwechselgeschwindigkeit $u = D\,\omega$ darstellt. Differentiiert man (14) nach s, so erhält man

$$\varrho' = \frac{r}{(\sin\varphi - r\,\vartheta')^2}(2\,r'\,\vartheta' \sin\varphi + r\,\vartheta'' \sin\varphi - r\,r'\,\vartheta'^2 - r\,\vartheta'\,\varphi' \cos\varphi)\,.$$

Nun ist nach *Müller*[1]

$$r' = -\cos\varphi\,, \qquad \varphi' = \frac{\sin\varphi}{r} - (\vartheta' + \tau')\,,$$

und beachtet man ferner die Abkürzungen (12), so folgt schließlich

$$\varrho' = \frac{3\,r\,D}{(D \sin\varphi - r)^2}\left[r\left(\frac{\cos\varphi}{l} + \frac{\sin\varphi}{m}\right) - \sin\varphi\cos\varphi\right]. \tag{15c}$$

Setzt man beiläufig die eckige Klammer gleich Null, so erhält man (11a), wie zu erwarten. Führt man nunmehr (15a) bis (15c) in (7c) für R_n ein, so liefert dies geordnet

$$R_n = 3\,\omega\left[D^2\omega^2 \sin\varphi\left(\frac{\varepsilon}{\omega^2 D} - \frac{1}{m}\right) - D^2\,\omega^2 \cos\varphi\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{D}\right) - r\,\varepsilon\right]$$

[1] Vgl. Fußnote 1 von Seite 59.

oder unter Beachtung der Definition für g, den Durchmesser des Gleichenkreises, und der ersten Gleichung (13) auch

$$R_n = 3\,\omega\left(D^2\omega^2\frac{\sin\varphi}{m^*} - D^2\omega^2\frac{\cos\varphi}{l_0} - r\,\varepsilon\right) \tag{16a}$$

oder

$$R_n = 3\,D\,\omega^3\left(\frac{D}{m^*}\sin\varphi - \frac{D}{l_0}\cos\varphi - \frac{r}{g}\right) \tag{16b}$$

mit der Abkürzung

$$\frac{1}{m^*} = \frac{1}{g} - \frac{1}{m}\,. \tag{16c}$$

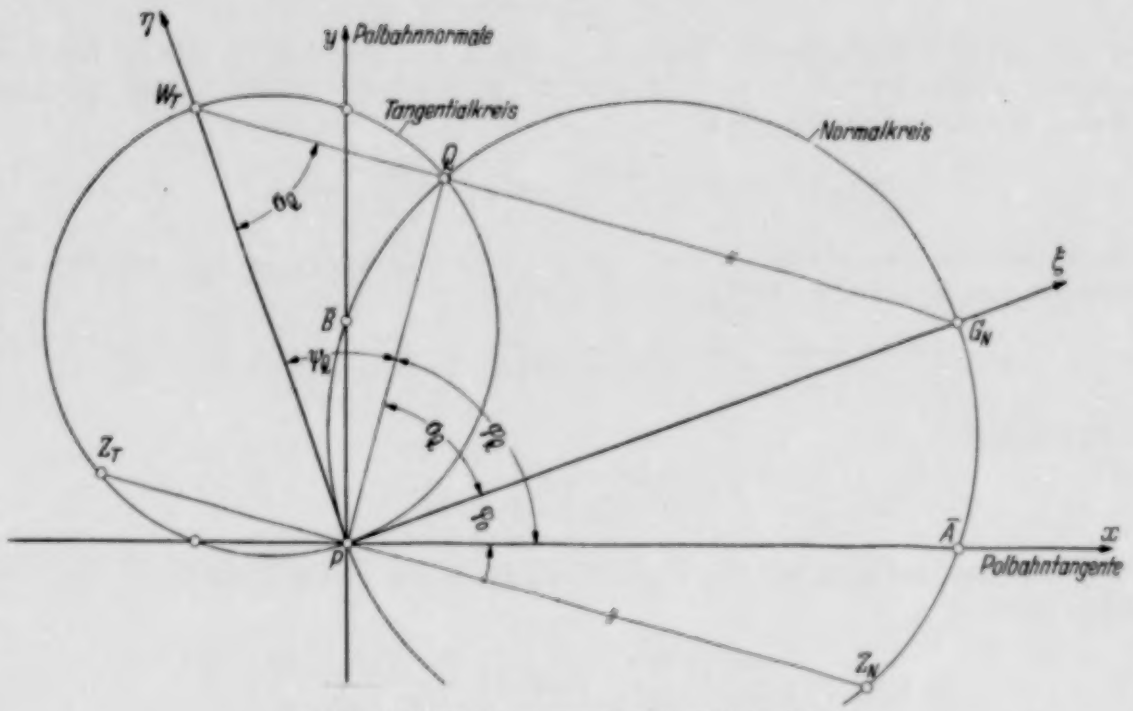

Abb. 9. Verhältnisse am Tangentialkreis und Normalkreis.

Für einen weiter unten zu betrachtenden Sonderfall sei auch noch die Form

$$R_n = 3\,D\,\omega^3\left[\frac{1}{g}\,(D\sin\varphi - r) - D\left(\frac{\cos\varphi}{l_0} + \frac{\sin\varphi}{m}\right)\right] \tag{16d}$$

angegeben.

Jetzt kann die Frage nach dem Ort derjenigen Punkte gestellt werden, für welche die Normalkomponente des Ruckes verschwindet, also nur die Tangentialkomponente R_t (s. u.) vorhanden ist. Nullsetzen von R_n in (16b) liefert dann

$$r = g\left[\frac{D}{m^*}\sin\varphi - \frac{D}{l_0}\cos\varphi\right] = B\sin\varphi - A\cos\varphi, \tag{17a}$$

mit

$$A = \frac{Dg}{l_0} \quad \text{und} \quad B = \frac{Dg}{m^*}\,. \tag{17b}$$

Hierfür läßt sich auch schreiben

$$r = T\sin(\varphi - \varphi_0) \tag{17c}$$

mit

$$T = D\,g\sqrt{\left(\frac{1}{l_0}\right)^2 + \left(\frac{1}{m^*}\right)^2} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{A}{B} = \frac{m^*}{l_0}\,. \tag{17d}$$

Gleichung (17c) stellt also die Polargleichung eines Kreises, des Tangentialkreises K_{RT} vom Durchmesser T dar; sein Mittelpunkt liegt auf dem Strahl, welcher mit der Polbahntangente den Winkel $\varphi_0 + \pi/2$ bildet (Abb. 9). Da nach (17a) doch $r(0) = -A$ und $r(\pi/2) = B$ ist, schneidet der

Tangentialkreis auf der Polbahntangente die Strecke $-A$ und auf der Polbahnnormale die Strecke B ab. Der auf dem Strahl $\varphi_0 + \pi/2$ gelegene Punkt des Tangentialkreises sei mit W_T bezeichnet.

2) *Die Tangentialkomponente und der Normalkreis.* Zur Ermittlung der Tangentialkomponente benutzen wir die Gleichungen (7b), (10b) und (14), d. h. es wird

$$R_t = \frac{db_t}{dt} - \frac{v^3}{\varrho^2} = \frac{d}{dt}(r\varepsilon - D\omega^2 \cos\varphi) - \frac{v^3}{\varrho^2}$$

oder mit

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{ds}\frac{ds}{dt} = D\omega\frac{d}{ds}$$

auch

$$R_t = D\omega\varepsilon r' + r\dot{\varepsilon} - D\omega^3 \cos\varphi \cdot D' - 2D\omega\varepsilon\cos\varphi + D^2\omega^3 \sin\varphi \cdot \varphi' - \frac{\omega^3}{r}(D\sin\varphi - r)^2 .$$

Beachtet man die oben angegebenen Werte für r' und φ', ferner, daß für den im Glied mit $\sin\varphi$ vorkommenden Faktor $2D - (\vartheta' + \tau')D^2$ auch $D^2(\vartheta' - \tau') = -3D^2/l_0$ gemäß (12) geschrieben werden kann, so erhält man schließlich

$$R_t = r(\dot{\varepsilon} - \omega^3) - \frac{3D^2\omega^3}{m^*}\cos\varphi - \frac{3D^2\omega^3}{l_0}\sin\varphi . \tag{18}$$

Diese Tangentialkomponente verschwindet auf dem Normalkreis, so daß auf diesem nur die Normalkomponente R_n auftritt. Er hat die Gleichung

$$r = \frac{3D^2\omega^3}{\dot{\varepsilon} - \omega^3}\left(\frac{\cos\varphi}{m^*} + \frac{\sin\varphi}{l_0}\right) = \bar{A}\cos\varphi + \bar{B}\sin\varphi = N\cos(\varphi - \varphi_0) , \tag{19a}$$

also den Durchmesser

$$N = \frac{3D^2\omega^3}{\dot{\varepsilon} - \omega^3}\sqrt{\frac{1}{m^{*2}} + \frac{1}{l_0^2}} . \tag{19b}$$

Sein Mittelpunkt liegt auf dem Strahl $\varphi - \varphi_0$ mit φ_0 aus (17d), und er trifft die x- bzw. y-Achse in den Strecken (Abb. 9)

$$\bar{A} = \frac{3\omega^3}{\dot{\varepsilon} - \omega^3}\cdot\frac{D^2}{m^*} \quad \text{und} \quad \bar{B} = \frac{3\omega^3}{\dot{\varepsilon} - \omega^3}\cdot\frac{D^2}{l_0} . \tag{19c}$$

c) Der Ruckpol. 1) *Definition.* Der Tangential- und der Normalkreis schneiden sich außer im Momentanpol, dem singulären Punkt, noch im Punkt Q, und zwar rechtwinklig (Abb. 9). Dort verschwinden R_t und R_n, es ist R gleich Null, d. h. Q stellt den Ruckpol dar. Setzt man die Werte r aus (19a) und (17c) einander gleich, d. h. setzt

$$T\sin(\varphi_Q - \varphi_0) = N\cos(\varphi_Q - \varphi_0) ,$$

so folgt mit $\varphi_Q - \varphi_0 = \sigma_Q$ die Richtung des Strahles PQ aus

$$\operatorname{tg}\sigma_Q = \operatorname{tg}(\varphi_Q - \varphi_0) = \frac{N}{T} = \frac{3\omega\varepsilon}{\dot{\varepsilon} - \omega^3} = \frac{3\varepsilon/\omega^2}{\dot{\varepsilon}/\omega^3 - 1} . \tag{20}$$

Wählt man nun Q als Bezugspunkt und wendet den Satz von *Euler* für den Ruck an, so haben wir (momentan), da $R_Q = 0$, die gleichen Verhältnisse wie bei der Drehung um einen festen Punkt:

Die Ruckbeträge verhalten sich wie die Abstände der bewegten Punkte vom Ruckpol, und die Ruckvektoren bilden mit dem vom Ruckpol zu den bewegten Punkten gezogenen Strahlen den gleichen Winkel $\psi_Q = \pi/2 - \sigma_Q$. (Vgl. hierzu die später angegebenen Werte für R in den Punkten W_T, G_N und P.)

2) *Verlauf von R_t auf dem Tangentialkreis.* Man kann dem Wert von R_t aus (18) auch die Form

$$\left.\begin{aligned} R_t &= (\dot{\varepsilon} - \omega^3)[r - (\bar{A}\cos\varphi + \bar{B}\sin\varphi)] \\ &= (\dot{\varepsilon} - \omega^3)[r - N\cos(\varphi - \varphi_0)] \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

geben, und setzt man hierin die Gleichung $r = T\sin(\varphi - \varphi_0)$ des Tangentialkreises ein, so folgt mit dem vom Strahl PG_n aus gerechneten Winkel $\sigma = \varphi - \varphi_0$ einfach

$$R_t = (\dot{\varepsilon} - \omega^3)(T\sin\sigma - N\cos\sigma) = (\dot{\varepsilon} - \omega^3)\,\overline{W_T G_N}\sin(\sigma - \sigma_Q) , \tag{22}$$

da $\sqrt{T^2 + N^2}$ gleich der Strecke $\overline{W_T G_N}$ ist (Abb. 9). Wie erwartet, verschwindet R_t für $\sigma = \sigma_Q$ (Punkt Q); ferner hat R_t sein Extremum $R_t = (\dot{\varepsilon} - \omega^3)\ \overline{W_T G_N}$ auf dem Strahl $\sigma = \sigma_Q + \pi/2$, also im Punkt Z_T, wobei PZ_T parallel QW_T verläuft. Im Punkt W_T gilt

$$R_t = (\dot{\varepsilon} - \omega^3)\ \overline{W_T G_N} \cos \sigma_Q = T\,(\dot{\varepsilon} - \omega^3)\ .$$

3) *Verlauf von R_n auf dem Normalkreis.* Man kann dem Wert R_n aus (16a) auch die Form

$$R_n = 3\,\omega\,\varepsilon\,[(B \sin\varphi - A \cos\varphi) - r] = 3\,\omega\,\varepsilon\,[T \sin(\varphi - \varphi_0) - r] \tag{23}$$

geben, und setzt man hierin die Gleichung $r = N \cos(\varphi - \varphi_0)$ des Normalkreises ein, so wird wie oben mit $\sigma = \varphi - \varphi_0$

$$R_n = 3\,\omega\,\varepsilon\,(T \sin\sigma - N \cos\sigma) = 3\,\omega\,\varepsilon\,\overline{W_T G_N} \sin(\sigma - \sigma_Q)\ . \tag{24}$$

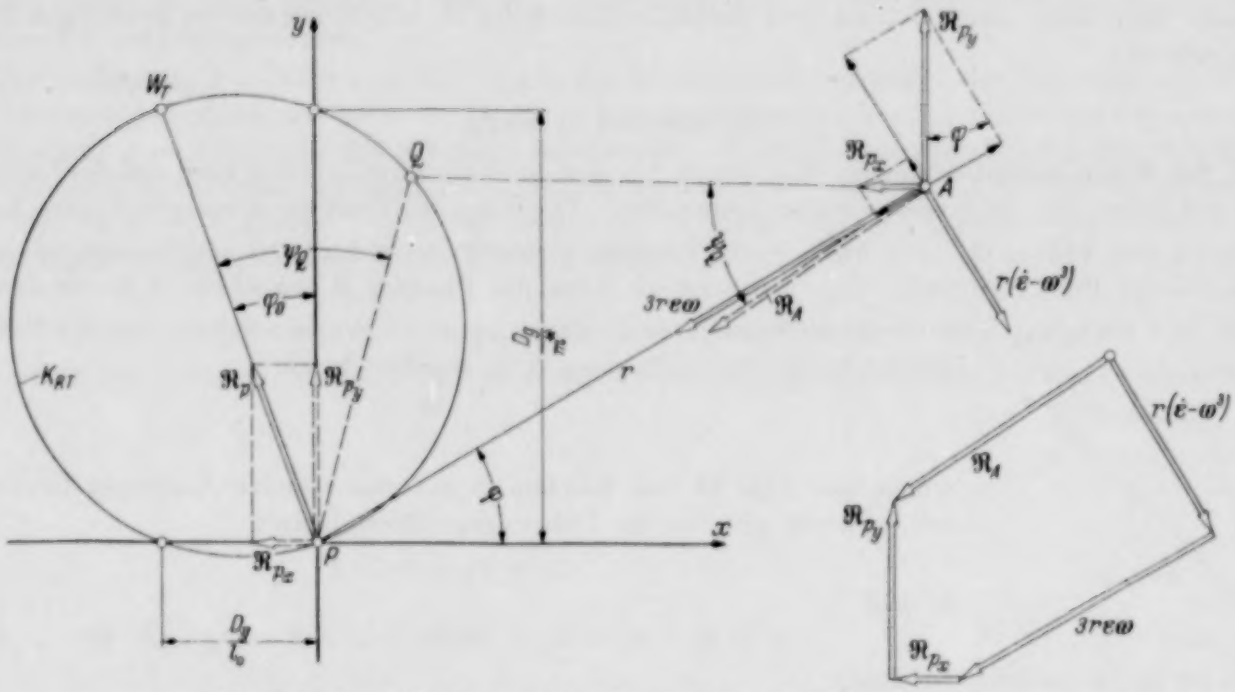

Abb. 10. Der Ruck eines Punktes A der bewegten Ebene außerhalb des Normalkreises.

Im Punkt $Q(\sigma = \sigma_Q)$ verschwindet R_n, und R_n hat sein Extremum $R_n = 3\,\omega\,\varepsilon\ \overline{W_T G_N}$ im Punkte Z_N auf der Verlängerung des Strahles PZ_T (Abb. 9).

Im Punkt G_N gilt mit $\sigma = 0$ der Wert

$$R_n = -3\,\omega\,\varepsilon \cdot \overline{W_T G_N} \sin\sigma_Q = -3\,N\,\omega\,\varepsilon\ .$$

d) Der Ruck des Momentalpoles. Wenn der Ruck $\mathfrak{R}_p$ des Momentanpoles P die Komponenten R_{px} und R_{py} in Richtung der Achsen x und y (Polbahntangente und Polbahnnormale) hat, so liefert die Anwendung des Satzes von *Euler* gemäß Abb. 10 die Komponenten[1]

$$R_n = -3\,r\,\omega\,\varepsilon + R_{px}\cos\varphi + R_{py}\sin\varphi\ , \tag{25a}$$

$$R_t = r\,(\dot{\varepsilon} - \omega^3) - R_{px}\sin\varphi - R_{py}\cos\varphi\ , \tag{25b}$$

und der Vergleich mit den Gleichungen (16b) und (18) zeigt, daß

$$R_{px} = -\frac{3\,D^2\omega^3}{l_0}\ , \qquad R_{py} = \frac{3\,D^2\omega^3}{m^*} \tag{26a}$$

sein muß. Der Ruck $\mathfrak{R}_p$ hat also, da $R_{py}/R_{px} = -l_0/m^*$ ist, die Richtung von PW_T (Abb. 10) und den Betrag

$$R_p = 3\,D^2\omega^3 \sqrt{\frac{1}{l_0^2} + \frac{1}{m^{*2}}} = 3\,\omega\,\varepsilon\,T \tag{26b}$$

unter Beachtung von (17d).

[1] Man gehe in Abb. 10b von einem positiven, d. h. nach rechts gerichteten Wert R_{px} aus.

e) Das Extremum der Tangentialbeschleunigung. Nach (7b) ist $db_t/dt = 0$, wenn $R_t = -v^3/\varrho^2$, also auch nach (18)

$$r(\dot{\varepsilon} - \omega^3) - \frac{3D^2\omega^3}{m^*}\cos\varphi - \frac{3D^2\omega^3}{l_0}\sin\varphi + \frac{\omega^3}{r}(D\sin\varphi - r)^2 = 0 \tag{27a}$$

ist. Bildet man unmittelbar db_t/dt, wie bei der Entwicklung von R_t angegeben, so tritt dabei der Ausdruck $1/D + 1/R_0$ auf, welcher nach (13,2) aber $1/R_{kg}$ bedeutet, und dann kann auch geschrieben werden

$$\frac{3D^2}{m^*}\cos\varphi - \frac{D^2}{R_{kg}}\sin\varphi + \frac{1}{r}\left(r^2\frac{\dot{\varepsilon}}{\omega^3} + D^2\sin^2\varphi\right) = 0 \tag{27b}$$

als geometrischer Ort $r = r(\varphi)$ derjenigen Punkte, welche momentan ein Extremum ihrer Tangentialbeschleunigung b_t aufweisen.[1] Es handelt sich hierbei um eine Kurve vierter Ordnung, wie Einsetzen von $\cos\varphi = x/r$, $\sin\varphi = y/r$ und $r^2 = x^2 + y^2$ zeigt. Auf die Diskussion im einzelnen sei jetzt verzichtet, nur wird die Anwendung in Ziff. 4 der II. Mitteilung bei der zyklischen Bewegung erörtert.

II. Relativbewegung

5. Die Relativbeschleunigung. Hier erweist es sich als zweckmäßig, noch kurz auf die Entwicklung der Sätze über Relativbewegung einzugehen: Die Lage des Punktes A einer bewegten Ebene sei durch den Vektor $\overrightarrow{OA} = \mathfrak{a}$ und die des Punktes B durch den Vektor $\overrightarrow{OB} = \mathfrak{r}$ angegeben, wobei O ein fester Punkt sei (Abb. 11). Dann ist die Lage des Punktes B gegenüber A durch den der Größe und Richtung nach veränderlichen Vektor $\overrightarrow{AB} = \mathfrak{s} = \mathfrak{r} - \mathfrak{a}$ gekennzeichnet, und die Relativgeschwindigkeit des Punktes B ist gegeben durch

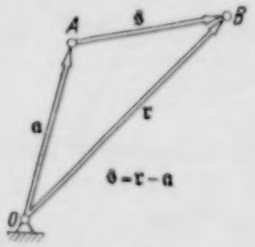

Abb. 11. Die relative Lage des Punktes B gegenüber dem Punkt A.

$$\mathfrak{v}_r = \frac{\mathfrak{d}\mathfrak{s}}{\mathfrak{d}t}\,, \tag{28}$$

wobei wie üblich[2] das Zeichen $\mathfrak{d}$ auf die relative Änderung hinweisen soll. Ferner gilt für die Führungsgeschwindigkeit

$$\mathfrak{v}_f = \mathfrak{v}_A + \overline{\omega} \times \mathfrak{s}\,, \tag{29}$$

so daß

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_f + \mathfrak{v}_r = \mathfrak{v}_A + \mathfrak{d}\mathfrak{s}/\mathfrak{d}t + \overline{\omega} \times \mathfrak{s} = \mathfrak{v}_A + d\mathfrak{s}/dt \tag{30a}$$

wird mit

$$\frac{d\mathfrak{s}}{dt} = \frac{\mathfrak{d}\mathfrak{s}}{dt} + \overline{\omega} \times \mathfrak{s}\,. \tag{30b}$$

Allgemein gilt also für die absolute und die relative Änderung eines Vektors $\mathfrak{F}$

$$\frac{d\mathfrak{F}}{dt} = \frac{\mathfrak{d}\mathfrak{F}}{\mathfrak{d}t} + \overline{\omega} \times \mathfrak{F}\,. \tag{31}$$

Für die Absolutbeschleunigung des Punktes B gilt ferner

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_r + \mathfrak{b}_f + \mathfrak{b}_c\,, \tag{32}$$

worin

$\mathfrak{b}_r = \dfrac{\mathfrak{d}^2 s}{\mathfrak{d}t^2}$ die Relativbeschleunigung,

$\mathfrak{b}_f = \mathfrak{b}_A - \omega^2\,\mathfrak{s} + \overline{\varepsilon} \times \mathfrak{s}$ die Führungsbeschleunigung (Satz von *Euler*),

$\mathfrak{b}_c = 2\,\overline{\omega} \times \mathfrak{v}_r$ die Coriolis- oder Zusatzbeschleunigung

darstellen mit $\overline{\varepsilon} = \dot{\overline{\omega}} = d\overline{\omega}/dt$.

6. Der Relativruck. Um nun den Ruck $\mathfrak{R} = db/dt$ zu finden, muß (32) unter Beachtung von (31) nochmals differentiiert werden. Dann folgt

$$\frac{db}{dt} = \left(\frac{\mathfrak{d}\mathfrak{b}_r}{\mathfrak{d}t} + \overline{\omega} \times \mathfrak{b}_r\right) + \frac{d\mathfrak{b}_A}{dt} - \omega^2\left(\frac{\mathfrak{d}\mathfrak{s}}{\mathfrak{d}t} + \overline{\omega} \times \mathfrak{s}\right) - 2\,\omega\,\varepsilon\,\mathfrak{s} + \dot{\overline{\varepsilon}} \times \mathfrak{s} + \overline{\varepsilon} \times \left(\frac{\mathfrak{d}\mathfrak{s}}{\mathfrak{d}t} + \overline{\omega} \times \mathfrak{s}\right)$$
$$+ 2\,\overline{\varepsilon} \times \mathfrak{v}_r + 2\,\overline{\omega} \times \left(\frac{\mathfrak{d}\mathfrak{v}_r}{\mathfrak{d}t} + \overline{\omega} \times \mathfrak{v}_r\right).$$

[1] Die Punkte, welche ein Extremum der Geschwindigkeit $v = r\omega$ aufweisen, liegen ja auf dem Gleichenkreis (vgl. Fußnote 1 auf Seite 59).

[2] Vgl. z. B. *G. Hamel*, Elementare Mechanik, Leipzig 1923 oder *I. Szabo*, Einführung in die technische Mechanik, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1954.

Beachtet man, daß $\mathfrak{d}\mathfrak{b}_r/\mathfrak{d}t = \mathfrak{R}_r$ als Relativdruck und $d\mathfrak{b}_A/dt = \mathfrak{R}_A$ als Ruck des Punktes A, ebenso $\mathfrak{d}\mathfrak{v}_r/\mathfrak{d}t = \mathfrak{b}_r$ geschrieben werden kann, ferner daß

$$\bar{\varepsilon} \times (\bar{\omega} \times \mathfrak{s}) = -\varepsilon\,\omega\,\mathfrak{s} \quad \text{und} \quad \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \mathfrak{v}_r) = -\omega^2\,\mathfrak{v}_r$$

ist, so bleibt

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_r + (\mathfrak{R}_A + \dot{\bar{\varepsilon}} \times \mathfrak{s} - \omega^2\,\mathfrak{v}_{BA} - 3\,\omega\,\varepsilon\,\mathfrak{s}) + (3\,\bar{\omega} \times \mathfrak{b}_r + 3\,\bar{\varepsilon} \times \mathfrak{v}_r - 3\,\omega^2\,\mathfrak{v}_r)\,, \tag{33a}$$

oder, in ähnlichem Aufbau wie bei der Beschleunigung,

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_r + \mathfrak{R}_f + \mathfrak{R}_{zus}\,, \tag{33b}$$

worin $\mathfrak{R}$ der Absolutruck, $\mathfrak{R}_r$ der Relativruck $= \mathfrak{d}\mathfrak{b}_r/\mathfrak{d}t$, $\mathfrak{R}_f$ der Führungsruck gemäß (26a) bis (26c) oder (33a) und

$$\mathfrak{R}_{zus} = 3\,(\bar{\omega} \times \mathfrak{b}_r + \bar{\varepsilon} \times \mathfrak{v}_r - \omega^2\,\mathfrak{v}_r) \tag{33c}$$

gesetzt sind. Der erste Summand von $\mathfrak{R}_{zus}$ steht senkrecht $\mathfrak{b}_r$, der zweite senkrecht $\mathfrak{v}_r$ und der dritte ist $\mathfrak{v}_r$ entgegengerichtet.

Die Bedingung $\dot{\bar{\varepsilon}} = 0$ für eine Extremum der Winkelbeschleunigung[1] der Führung ergibt dann zeichnerische Verfahren, wie sie in der II. Mitteilung an den Beispielen 7 und 8 gezeigt werden sollen.

Betrachtet man beiläufig das bekannte Beispiel des sich auf einer drehenden Scheibe vom Mittelpunkt radial nach außen bewegenden Punktes, so ergibt die Differentiation der Komponenten $\bar{x} = r(\varphi)\cos\varphi$, $\bar{y} = r(\varphi)\sin\varphi$ nach der Zeit und die vektorielle Zusammensetzung der dritten Ableitungen den gleichen Aufbau für $\mathfrak{R}$ wie in (33b).

(Eingegangen am 21. April 1958.)

Anschrift des Verfassers: Professor Dr. Ing. *Walther Meyer zur Capellen*, Aachen, Technische Hochschule.

[1] $\dot{\bar{\varepsilon}}$ tritt nur in $\mathfrak{R}_f$ auf.

Über die Grenzamplitude einer Klasse selbsterregter Schwingungen

Von **Hans Schubart**

1. Einleitung. *K. Klotter* hat in einer Arbeit, die vor kurzem in dieser Zeitschrift erschienen ist[1], zusammen mit *E. Kreyszig* eine Klasse selbsterregter Schwingungen behandelt, die der Differentialgleichung

$$\ddot{q} - (\operatorname{sign} \dot{q}) \left[\frac{\beta}{2} (1 - \alpha^2 q^2) \dot{q}^2 \right] + \varkappa^2 f(q) = 0 \qquad (\beta > 0) \tag{1.1}$$

genügen. Bekannte Transformationen ($V = \dot{q}^2$) führen mit $V' = dV/dq$ zu

$$V' + \beta (1 - \alpha^2 q) V + \gamma f(q) = 0 . \tag{1.2}$$

Als Lösung ergibt sich nach den üblichen Regeln:

$$V(q) = \frac{-\gamma^2}{s(q)} (I(q) + k) \qquad (k \text{ eine Integrationskonstante}) . \tag{1.3}$$

Dabei ist

$$s(q) = \exp \left[\beta q \left(1 - \frac{\alpha^2}{3} q^2 \right) \right], \quad I(q) = \int_0^q s(t) f(t) \, dt . \tag{1.4}$$

Es handelt sich also im allgemeinen Fall um nicht elementar integrierbare Funktionen.

Ein wesentliches Problem der Schwingungslehre stellt die Frage nach der Größe der Grenzamplitude q^* in Abhängigkeit von der Rückstellkraft $f(q)$ und von dem Koeffizienten α dar. Dabei wird q^* bekanntlich durch

$$(I(q^*) = -I(-q^*) \qquad (q^* > 0)) \tag{1.5}$$

definiert. In der oben zitierten Arbeit ist gezeigt, daß $q^* \geqq \sqrt{3}/\alpha$ für polynomiales $f(q)$ gilt, wobei noch $f(q) \geqq 0$ für $q > 0$ und $f(q) \leqq 0$ für $q < 0$ gefordert wird; außerdem wird dort die Beziehung $\lim_{l \to \infty} q^*(l) = \sqrt{3}/|\alpha|$ für $f(q) = C/q^{2l+1}$ bewiesen. Weiter werden mit Hilfe transzendenter Gleichungen und nicht elementarer Funktionen obere Schranken für q^* gewonnen.

In dieser Note sollen einige Aussagen über obere und untere Schranken von q^* gemacht werden, wobei die Rückstellkraft

$$f(q) = \sum_{l=0}^{k} C_l q^{2l+1} \qquad (C_l \geqq 0)$$

gesetzt ist. Es handelt sich dabei also um Rückstellkräfte, wie sie für die Schwingungslehre charakteristisch sind. Bei der Berechnung der Schranken werden nur elementare Funktionen benutzt.

2. Formulierung der mathematischen Aufgabe. Nach (1.5) muß für die Grenzamplitude $q^* > 0$ die Gleichung

$$\int_0^{q^*} f(t) \exp \left[\beta t \left(1 - \frac{\alpha^2}{3} t^2 \right) \right] dt = - \int_{-q^*}^{0} f(t) \exp \left[\beta t \left(1 - \frac{\alpha^2}{3} t^2 \right) \right] dt \tag{2.1}$$

bestehen. Ersetzen wir rechts t durch $(-t')$ und beachten, daß

$$f(q) = \sum_{l=0}^{k} C_l q^{2l+1} , \qquad C_l \geqq 0 , \; f(q) = -f(-q) , \qquad f(q) \neq 0 \quad \text{für} \quad q \neq 0 \tag{2.2}$$

ist, so erhalten wir

$$\int_0^{q^*} s(t) f(t) \, dt = - \int_{q^*}^{0} s(-t') f(-t') \, d(-t') ,$$

also

$$\int_0^{q^*} s(t) f(t) \, dt = \int_0^{q^*} s(-t') f(t') \, dt' .$$

[1] *K. Klotter* u. *E. Kreyszig*, Ing.-Arch. 25 (1957) S. 389.

Schreiben wir nun wieder t statt t' und setzen definitionsgemäß

$$s(t) - s(-t) = 2\,\mathfrak{Sin}\left(\beta t\left(1 - \frac{\alpha^2}{3}t^2\right)\right),$$

so gilt,

$$2\int_0^{q^*} f(t)\,\mathfrak{Sin}\left[\beta t\left(1 - \frac{\alpha^2}{3}t^2\right)\right]dt = 0\,. \tag{2.3}$$

Wir untersuchen daher die Funktion

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathfrak{Sin}\left[\beta t\left(1 - \frac{\alpha^2}{3}t^2\right)\right]dt \quad \text{für} \quad x > 0. \tag{2.4}$$

Nach (2.2) hat mit $r(x) = \beta x\,(1 - \frac{1}{3}\alpha^2 x^2)$ die Ableitung $dF/dx = f(x)\,\mathfrak{Sin}\,(r(x))$ für $x > 0$ nur eine einzige Nullstelle $\xi = \sqrt{3}/|\alpha|$. Da diese außerdem einen Vorzeichenwechsel bedingt, so nimmt $F(x)$ an der Stelle $x = \xi$ eine positives Maximum an, weil der Integrand > 0 im Intervall $0 < t \leqq \xi$ ist. Aus (2.2) und (2.4) entnehmen wir schließlich, da bekanntlich Exponentialfunktion bzw. die Hyperbelfunktionen schneller für $x \to \infty$ anwachsen als jede Potenz von x,

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = -\infty\,. \tag{2.5}$$

Damit ist wegen $F(\xi) > 0$ und $dF/dx < 0$ für $x > \xi$ die gesuchte Grenzamplitude q^* die einzige positive Nullstelle unserer Funktion $F(x)$ und es gilt $q^* > \xi = \sqrt{3}\,|\alpha|$, also das in Ziff. 1 zitierte Ergebnis.

Im folgenden werden wir daher q^* in der Form $\delta\,\xi$ schreiben ($\delta > 1$) und $F(\delta\,\xi) = F(\xi) + [F(\delta\,\xi) - F(\xi)]$ abzuschätzen versuchen. Definitionsgemäß gilt dann für sign $F(\delta_1\,\xi) = -1$ bzw. sign $F(\delta_2\,\xi) = 1$ die Ungleichung $q^* < \delta_1\,\xi$ bzw. $q^* > \delta_2\,\xi$.

Um die Rechnung zu vereinfachen, beachten wir noch, das wegen $\mathfrak{Sin}\,(-x) = -\mathfrak{Sin}\,x$ die Beziehung

$$\left|\int_\xi^{\delta\xi} f(t)\,\mathfrak{Sin}\,r(t)\,dt\right| = \int_\xi^{\delta\xi} f(t)\,\mathfrak{Sin}\,r_1(t)\,dt \tag{2.6}$$

mit $r_1(t) = \beta\,t\,(\frac{1}{3}\alpha^2 t^2 - 1)$ besteht. Damit können wir uns bei der Bestimmung des Vorzeichens von $F(\delta\,\xi)$ auf die Berechnung der Differenz zweier positiver Größen $F_1(\delta\,\xi)$ und $F(\xi)$, die durch

$$F_1 - F = \int_\xi^{\delta\xi} f(t)\,\mathfrak{Sin}\,r_1(t)\,dt - \int_0^{\xi} f(t)\,\mathfrak{Sin}\,r(t)\,dt \tag{2.7}$$

definiert sind, beschränken.

3. Obere und untere Schranken für $F(\xi)$. Um eine obere Schranke von $F(\xi)$ zu erhalten, ersetzen wir in (2.4) die $\mathfrak{Sin}$-Funktion durch ihr Maximum im Intervall $0 \leqq t \leqq \xi$. Da aber $\mathfrak{Sin}\,x$ für $x > 0$ monoton wächst, so muß das Maximum von $r(t)$ für $0 \leqq t \leqq \xi$ bestimmt werden.

Dieses wird nach bekannten Regeln für $t = 1/|\alpha|$ angenommen. Wir erhalten mit

$$\mathfrak{Sin}\,r\left(\frac{1}{|\alpha|}\right) = \mathfrak{Sin}\,\frac{2}{3}\frac{\beta}{|\alpha|}$$

und (2.2)

$$F(\xi) \leqq \mathfrak{Sin}\,\frac{2}{3}\frac{\beta}{|\alpha|}\cdot\sum_{l=0}^{k}\frac{\xi^{2l+2}}{2l+2}\,. \tag{3.1}$$

Soll eine untere Schranke für $F(\xi)$ angegeben werden, so müssen wir zunächst das Integrationsintervall so verkleinern, daß in ihm keine Nullstelle der $\mathfrak{Sin}$-Funktion enthalten ist. Wir werden daher mit $0 < \varrho_1 < 1 - \varrho_2 < 1$ die Größe $F(\xi)$ durch $\int_{\varrho_1\xi}^{(1-\varrho_2)\xi} f(t)\,\mathfrak{Sin}\,(r\,(t))\,dt$ nach unten abschätzen. Im Falle der allgemein nach (2.2) gegebenen Rückstellkraft $f(q)$ wird sich später (Ziff. 7) der Ansatz $\varrho_1 = \varrho_2 = 1/4$ empfehlen, während für $f(q) = C\,q$, $f(q) = Cq^3$, $f(q) = C_0 q + C_1 q^3$ sich andere Ansätze als vorteilhafter erweisen.

Eine wesentliche Schwierigkeit besteht darin, daß nichts über die Größe von ξ bzw. von α vorausgesetzt werden soll. Es sei hier nur vermerkt, daß sich u. U. unsere Formeln noch wesentlich verbessern lassen, wenn α weiteren Beschränkungen unterworfen wird.

In diesem Abschnitt behandeln wir nur die untere Schranke von $F(\xi)$ für eine nach (2.2) allgemein gegebene Rückstellkraft und schätzen daher $F(\xi)$ durch

$$F(\xi) > \int_{\xi/4}^{3/4\,\xi} f(t)\, \mathfrak{Sin}\, r(t)\, dt \tag{3.2}$$

nach unten ab. Dabei werden wir $f(q)$ in seine einzelnen Summanden zerlegen, was auch für (2.7) möglich ist, sodaß wir für unsere Betrachtung die Größen C_l nicht zu berücksichtigen brauchen, wegen $\mathfrak{Sin}\, r\left(\frac{\xi}{4}\right) < \mathfrak{Sin}\, r\left(\frac{3}{4}\,\xi\right)$ erhalten wir mit $r\left(\frac{\xi}{4}\right) = \beta\, \xi \cdot 15/64$

$$\int_{\xi/4}^{3/4\,\xi} t^{2l+2}\, \mathfrak{Sin}\, r(t)\, dt > \mathfrak{Sin}\left(\frac{\beta\,\xi \cdot 15}{64}\right) \frac{\xi^{2l+2}}{2l+2} \left[\left(\frac{3}{4}\right)^{2l+2} - \left(\frac{1}{4}\right)^{2l+2}\right] \tag{3.3}$$

und damit nach (2.2)

$$F(\xi) > \sum_{l=0}^{k} C_l \left[\left(\frac{9}{16}\right)^{l+1} - \left(\frac{1}{16}\right)^{l+1}\right] \frac{\xi^{2l+2}}{2l+2}\, \mathfrak{Sin}\, \frac{\beta\,\xi \cdot 15}{64}\,. \tag{3.4}$$

4. Bestimmung einer oberen Schranke der Grenzamplitude q^*. Um die Methoden, die uns weiter unten eine bessere Bestimmung der Schranken von q^* gestatten werden, zu erläutern und vorzubereiten, soll hier zunächst der Satz S_1:

$$q^* < 2\,\xi \qquad \text{für} \qquad f(q) = \sum_{l=0}^{k} C_l\, q^{2l+1}$$

bewiesen werden.

Hierzu genügt es offenbar zu zeigen, daß in (2.7) die Ungleichung $F_1(2\,\xi) > F(\xi)$ richtig ist. Dazu benutzen wir (3.1) und zerlegen $f(q)$ in seine einzelnen Summanden. Wir müssen die Ungleichung

$$\int_{\xi}^{2\xi} t^{2l+1}\, \mathfrak{Sin}\, r_1(t)\, dt > \int_{0}^{\xi} t^{2l+1}\, \mathfrak{Sin}\, r(t)\, dt \tag{4.1}$$

beweisen. Wir ersetzen dabei $\int_{\xi}^{2\xi}$ durch $\int_{(1+\sigma)\xi}^{\xi}$ $(0 < \sigma < 1)$ und wählen $\sigma = \frac{1}{2}$. Es wird dann sehr leicht

$$\int_{\xi}^{2\xi} \varphi(t)\, dt > \int_{3/2\,\xi}^{2\xi} \varphi(t)\, dt > \int_{0}^{\xi} \psi(t)\, dt \qquad \text{mit} \qquad \varphi = t^{2l+1}\, \mathfrak{Sin}\, r_1(t)\,, \qquad \psi = t^{2l+1}\, \mathfrak{Sin}\, r(t) \tag{4.2}$$

zu zeigen sein.

Da $r_1(t)$ für $t > \xi$ monoton wächst, so ist

$$\mathfrak{Sin}\, r_1(t) \geqq \mathfrak{Sin}\, r_1\left(\frac{3}{2}\,\xi\right) = \mathfrak{Sin}\left(\frac{\beta}{|\alpha|}\,\frac{\sqrt{3}\,15}{8}\right) \quad \text{für} \quad \frac{3}{2}\,\xi \leqq t \leqq 2\,\xi\,,$$

und in (4.2) ergibt sich

$$\int_{3/2\,\xi}^{2\xi} \geqq \mathfrak{Sin}\left(\frac{\beta}{\alpha}\,\frac{\sqrt{3}\,15}{8}\right) \frac{\xi^{2l+2}}{2l+2} \left[2^{2l+2} - \left(\frac{3}{2}\right)^{2l+2}\right].$$

Zum Beweis von Satz (S_1) muß also nur noch zufolge (3.1)

$$\frac{\xi^{2l+2}}{2l+2}\, \mathfrak{Sin}\, \frac{2\,\beta}{3\,|\alpha|} \leqq \frac{\xi^{2l+2}}{2l+2}\, \mathfrak{Sin}\left(\frac{\beta}{\alpha}\,\frac{\sqrt{3}\,15}{8}\right) \left[2^{2l+2} - \left(\frac{3}{2}\right)^{2l+2}\right] \tag{4.3}$$

erfüllt sein. Da aber offenbar für alle $l = 0, 1, 2, \ldots, k$ die Beziehung

$$1 < 2^{2l+2} - \left(\frac{3}{2}\right)^{2l+2}$$

richtig ist, so haben wir (S_1) vollständig bewiesen.

5. Verbesserung der oberen Schranke von q^*. Wir müssen, um die in Satz (S_1) gefundene obere Schranke zu verkleinern, einmal auf die Größe $\mathfrak{Sin}\left(\frac{2\,\beta}{3\,|\alpha|}\right)$ aus (3.1) achten und zum anderen versuchen, $\int_{\xi}^{2\xi}$ aus (4.2) durch $\int_{(1+\gamma)\xi}^{(1+\varrho)\xi}$ $0 < \gamma < \varrho < 1$ möglichst günstig nach unten abzuschätzen[1]. Als neue — und verbesserte — obere Schranke von q^* ergibt sich dann $(1 + \varrho)\,\xi$. Dabei wird in F_1 aus (2.7) $\mathfrak{Sin}\, r_1(t)$

[1] Die hier und in folgendem figurierende Größe γ ist nicht mit γ aus (1.2) bzw. (1.3) identisch.

durch $\mathfrak{Sin}\, r_2(1+\gamma)\xi$ nach unten abgeschätzt. Unsere Betrachtungen führen damit gleichzeitig, da für allgemeines ξ nicht Potenzen und $\mathfrak{Sin}$-Funktion verglichen werden können, zu den beiden Ungleichungen

$$\mathfrak{Sin}\,\frac{2\beta}{3\,|\alpha|} \leqq \mathfrak{Sin}\, r_1[(1+\gamma)\,\xi]\,, \tag{5.1a}$$

$$\int_0^{\xi} t^{2l+1}\,dt \leqq \int_{(1+\gamma)\xi}^{(1+\varrho)\xi} t^{2l+2}\,dt. \tag{5.1b}$$

Wegen

$$r_1[\xi\,(1+\gamma)] = \frac{\beta\sqrt{3}}{\alpha}\,\gamma\,(\gamma+1)\,(\gamma+2)$$

folgt aus (5.1a) $\gamma > 0{,}1547\ldots$ Dabei kann $\gamma = 13/84$ gesetzt werden. Mit diesem Wert ist die Ungleichung erfüllt, während $\gamma = 0{,}1545$ dies nicht leistet. Der Wert $\gamma = 13/84$ läßt sich höchstens noch in der vierten Dezimalen verbessern.

Nach (5.1) muß außerdem ϱ so bestimmt werden, daß

$$1 \leqq (1+\varrho)^{2l+2} - (1+\gamma)^{2l+2} \qquad \left(\gamma = \frac{13}{84}\right) \tag{5.2}$$

erfüllt ist. Da wir ϱ ($\varrho > \gamma$) möglichst klein machen wollen, ersetzen wir (5.2) durch

$$1 - \frac{1}{(1+\varrho)^{2l+1}} - \left(\frac{1+\gamma}{1+\varrho}\right)^{2l+2} \geqq 0\,. \tag{5.3}$$

Gleichung (5.3) muß für $l = 0, 1, \ldots, k$ gelten. Aus dieser Ungleichung ist unschwer zu erkennen, daß für wachsendes l sich ϱ immer mehr γ nähert.

Damit folgt zunächst eine etwas unschärfere Begrenzung der Granzamplitude nach oben, als sie in der oben zitierten Arbeit angegeben ist.

Es gilt der Satz S_2:

Ist $f(q) = C\,q^{2l+2}$, so genügt $q^*(l)$ der Ungleichung

$$(\xi =)\ \frac{\sqrt{3}}{|\alpha|} \leqq \lim_{l=\infty} q^*(l) \leqq 1{,}1547\,\xi\,.$$

Soll dagegen (5.3) auch für $l = 0, 1, \ldots, k$ gelten, so ergibt sich wegen

$$\frac{1}{(1+\varrho)^{2l+2}} + \left(\frac{1+\gamma}{1+\varrho}\right)^{2l+2} \leqq \frac{1}{(1+\varrho)^2} + \left(\frac{1+\gamma}{1+\varrho}\right)^2$$

aus

$$\frac{1}{(1+\varrho)^2} + \left(\frac{1+\gamma}{1+\varrho}\right)^2 = 1$$

eine für alle l gültige Schranke von ϱ. Als Wurzel dieser quadratischen Gleichung erhalten wir

$$1+\varrho = \sqrt{1+(1+\gamma)^2}$$

oder (mit $\gamma = 13/84$)

$$1+\varrho \geqq 1{,}5276\,.$$

Damit gilt der Satz S_3:

Hat die Rückstellkraft $f(q)$ die Form (2.2), also insbesondere auch für $f(q) = C\,q$, so ist $q^* \geqq 1{,}5276\,\xi$.

Ist dagegen $f(q) = C\,q^3$, so muß die Gleichung $(1+\varrho)^4 = 1 + (1+\gamma)^4$ gelöst werden. Die hieraus zu errechnende obere Schranke ergibt sich zu $1{,}2987\,\xi$.

Die in Satz (S_3) angegebene Schranke gilt naturgemäß auch für die spezielle Rückstellkraft $f(q) = C_0\,q + C_1\,q^3$. Wollte man diese noch verbessern, so geht in die Formel die Größe von ξ ein. Ersetzen wir in (5.1b) die t-Potenz durch $f(t) = C_0\,t + C_1\,t^3$, so genügt $x = (1+\varrho)^2$ der quadratischen Gleichung

$$x^2 + \frac{2}{\xi^2}\,\frac{C_0}{C_1}\,x - C = 0 \qquad \text{mit} \qquad C = (1+\gamma)^4 + 1 + \frac{C_0\,2}{C_1\,\xi^2}\,[1+(1+\gamma)^2]\,. \tag{5.4}$$

Die positive Wurzel x_1 von (5.4) liefert dann $1+\varrho = \sqrt{x_1}$ und mit diesem Wert ϱ ist (5.1 a) sicher erfüllt; denn mit $\gamma = 13/84$ bedingt (5.4) die Ungleichung $x_1 > (1+\gamma)^2$, also auch $(1+\varrho) > (1+\gamma)$.

Wir bemerken noch abschließend, daß für $f(q) = C\,q^{2l+2}$ aus (5.3)

$$1+\varrho = \exp\left(\frac{\log\,[1+(1+\gamma)^{2(l+1)}]}{2\,(l+1)}\right)$$

folgt,[1] und fassen diese Ergebnisse in dem folgenden Satz S_4 zusammen:

a) Für $f(q) = C\,q$ gilt $q^* < 1{,}5276\,\xi$,

b) für $f(q) = C\,q^3$ gilt $q^* < 1{,}2987\,\xi$,

c) für $f(q) = C q^{2l+1}\,(l > 1)$ gilt $q^* < \exp\dfrac{\log\,[1 + (1+\gamma)^{2(l+1)}]}{2\,(1+1)}\,\xi$,

d) für $f(q) = C_0\,q + C_1\,q^3$ kann die in Satz (S_3) angegebene obere Schranke von q^* durch $\sqrt{x_1}\,\xi$ ersetzt werden, wenn x_1 die positive Wurzel der quadratischen Gleichung (5.4) ist.

6. Berechnung einer unteren Schranke von q^* in drei Sonderfällen spezieller Rückstellkräfte. Wenn eine untere Schranke der Grenzamplitude bestimmt werden soll, so muß in (2.7)

$$\int_{\xi}^{\delta\xi} f(t)\,\mathfrak{Sin}\,r_1(t)\,dt \leqq \int_{0}^{\xi} f(t)\,\mathfrak{Sin}\,r(t)\,dt \tag{6.1}$$

gelten. Wir werden hier bestrebt sein, das links stehende Integral möglichst günstig nach oben und die rechte Seite der Ungleichung möglichst günstig nach unten abzuschätzen, ohne dabei das Zeichen $>$ in (6.1) zu ändern. Wir wollen zunächst den Fall

$$f(q) = C_0\,q \tag{6.2}$$

behandeln. Die Abschätzung (3.2) läßt sich für diese Rückstellkraft durch eine andere ersetzen, die wesentlich zweckdienlicher ist. Da für $\xi \leqq t = \delta\,\xi$ sicher $\mathfrak{Sin}\,r_1(t) \leqq \mathfrak{Sin}\,r_1(\delta\,\xi)$ ist, so gilt mit (6.2) zunächst

$$\int_{\xi}^{\delta\xi} t\,\mathfrak{Sin}\,r_1(t)\,dt \leqq \frac{\xi^2}{2}\,(\delta^2-1)\,\mathfrak{Sin}\,[\beta\,\xi\,\delta\,(\delta^2-1)]\,. \tag{6.3}$$

An Stelle von (3.2) werden für $f(q) = C_0 q$ die Größe $F(\xi)$ durch $\int_{\varrho_1\xi}^{(1-\varrho_2)\xi} t\,\mathfrak{Sin}\,r(t)\,dt$ mit $0 < \varrho_1 < 1 - \varrho_2 < 1$ nach unten abschätzen, dabei aber ϱ_1 und ϱ_2 so wählen, daß dieses Integral immer noch größer bleibt als die in (6.3) angegebene obere Schranke für $F_1(\delta\,\xi)$. Bei der eben geschilderten Abschätzung von $F(\xi)$ nach unten, ist dann $\mathfrak{Sin}\,r(t)$ durch

$$A = \mathrm{Min}\,\left(\mathfrak{Sin}\,r(\varrho_1\,\xi)/\mathfrak{Sin}\,r\,(1-\varrho_2)\right)$$

zu ersetzen. Wegen

$$F(\xi) > A\,\frac{\xi^2}{2}\,[(1-\varrho_2)^2 - \varrho_1^2)]$$

müssen wir ϱ_1 und ϱ_2 so bestimmen, daß nach (6.1) beide Ungleichungen

$$(\delta^2-1) \leqq (1-\varrho_2)^2 - \varrho_1^2\,, \tag{6.4a}$$

$$\delta\,(\delta^2-1) \leqq B \quad \text{mit} \quad B = \mathrm{Min}\,\left(\varrho_1\,(1-\varrho_1^2)/\varrho_2\,(1-\varrho_2)\,(2-\varrho_2)\right) \tag{6.4b}$$

gleichzeitig erfüllt sind. Damit ist (6.1) unter der Annahme (6.2) Genüge getan.

Eine kurze Rechnung zeigt, daß (6.4) mit $\varrho_1 = 0{,}5$, $\varrho_2 = 0{,}25$, $\delta = 1{,}125$ erfüllt ist. Somit gilt $q^* > 1{,}125\,\xi$.

Diese untere Schranke von q^* läßt sich aber noch vergrößern (und damit verbessern), wenn wir $0 < \varrho_1 = \varrho < \varrho + \varepsilon = 1 - \varrho_2 < 1$ setzen und beachten, daß damit aus (6.4a) und (6.4b)

$$\delta^2 - 1 \leqq 2\,\varrho\,\varepsilon + \varepsilon^2\,, \tag{6.5a}$$

$$\delta\,(\delta^2-1) \leqq B_1 \quad \text{mit} \quad B_1 = \mathrm{Min}\,[(\varrho-\varrho)^3/[(\varrho+\varepsilon) - (\varrho+\varepsilon)^3]] \tag{6.5b}$$

folgt und die Funktion $f_1(x) = x - x^3$ ihr Maximum im konkurrierenden Bereich für $x = 1/\sqrt{3}$ annimmt.

Wegen $\delta > 1$ muß nun ϱ und ε so gewählt werden, daß $2\,\varrho\,\varepsilon + \varepsilon^2 < B_1$ gilt und endlich ist noch zu berücksichtigen, unter welchen Bedingungen $f_1(\varrho) \leqq f_1\,(\varrho+\varepsilon)$ oder $f_1\,(\varrho+\varepsilon) < f_1(\varrho)$, m. a. W. ob $B_1 = f_1(\varrho)$ oder $B_1 = f_1\,(\varrho+\varepsilon)$ ist.

Hierbei erhalten wir folgende Beziehungen:

$$\text{Für} \quad 0 < \varrho_0 \leqq \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{und} \quad \varepsilon \lessgtr \frac{-3\,\varrho_0 + \sqrt{4 - 3\,\varrho_0^2}}{2} \quad \text{ist} \quad f_1(\varrho_0) \lessgtr f_1\,(\varrho_0+\varepsilon)\,,$$

$$\text{für} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} < \varrho_0 < 1 \quad \text{und} \quad \varepsilon \lessgtr \frac{-3\,\varrho_0 + \sqrt{4 - 3\,\varrho_0^2}}{2} \quad \text{ist} \quad f_1(\varrho_0) \gtrless f_1\,(\varrho_0+\varepsilon)\,.$$

[1] Hier und in folgenden bedeutet log stets den (natürlichen) Logarithmus zur Basis e.

Wenn wir dies bedenken, ergibt sich $\delta = 1{,}1421$ für $\varrho_0 = 0{,}43$, $\varepsilon = 0{,}27$, wobei es noch darauf ankommt, die Größe $2\varrho\varepsilon + \varepsilon^2$ möglichst geschickt zu variieren. Die angegebenen Werte für ϱ, ε, δ lassen sich aber auch ohne diese Überlegungen durch Rechnung bestätigen.

Der hier angegebene Wert von δ ist übrigens, wie sich aus Betrachtungen über mögliche Extremwerte der in (6.5) auftretenden Funktionen ergibt, höchstens noch in der dritten Stelle zu verbessern, wobei auch noch etwas über das Maximum aller nach (6.2) und (6.1) möglichen δ-Werte gesagt werden könnte.[1] In Verbindung mit Satz (S_4) a) haben wir somit den Satz (S_5) a):

Ist $f(q) = C\,q$, so erfüllt die Grenzamplitude q die Ungleichung $1{,}1421\,\xi < q^* < 1{,}5276\,\xi$.

Wir betrachten nun einen weiteren Spezialfall, nämlich

$$f(q) = C\,q^3\,. \tag{6.6}$$

Analog zu (6.4) und (6.5) müssen hier jeweils gleichzeitig die beiden Ungleichungen

$$\text{a)}\ \ \delta^4 - 1 \leqq (1-\varrho_2)^4 - \varrho_1^4\,, \qquad \text{b)}\ \ \delta\,(\delta^2 - 1) \leqq B\,, \tag{6.7}$$

bzw.

$$\text{a)}\ \ \delta^4 - 1 \leqq (\varrho+\varepsilon)^4 - \varrho^4, \qquad \text{b)}\ \ \delta\,(\delta^2 - 1) \leqq B_1 \tag{6.8}$$

erfüllt sein.

Die Schranken B bzw. B_1 sind von uns schon genauer analysiert worden; weiter ist zu beachten, daß für $\delta > 1$ stets $\delta^4 - 1 > \delta\,(\delta^2 - 1)$ gilt. Nach (6.8) a) ist zu erwarten, daß für $\varrho \approx \varepsilon$ sich eine besonders günstige Schranke für $\delta^4 - 1$ ergibt. Damit lassen sich allerdings keine besonders günstigen Werte für B_1 erzielen. In der Nähe des Maximum der δ-Werte liegt δ_0 mit $\delta > 1{,}1021 = \delta_0$, was sich für $\varrho = \varepsilon = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{10} + \frac{4}{9}\right)$ errechnen läßt. Damit erhalten wir in Verbindung mit Satz S_4 a) und b) die Sätze S_5 b):

Ist $f(q) = C\,q^3$, so gilt für die Grenzamplitude q^* $1{,}1021\,\xi < q^* < 1{,}2987\,\xi$.

und S_5 c):

Ist $f(q) = C_0\,q^3 + C_1\,q^3$, so gilt für die Grenzamplitude q^* $1{,}1021\,\xi < q^* < 1{,}5276\,\xi$.

Eine dem Satz S_4 d) entsprechende Aussage läßt sich bei unserem Verfahren mit Hilfe algebraischer Gleichungen vermutlich nicht gewinnen.

7. Generelle Bestimmung einer unteren Schranke der Grenzamplitude. Setzen wir für $l > 1$

$$f(q) = C\,q^{(2l+1)}\,, \tag{7.1}$$

so erkennen wir sofort, daß in der (6.4 a) bzw. (6.7) a) entsprechen Ungleichung auf der rechten Seite ein Faktor auftritt, der mit wachsendem l immer kleiner wird. Es liegt daher nahe für (7.1) in (2.7) $\delta = 1 + \Phi(l)$ mit $\lim\limits_{l\to\infty} \Phi(l) = 0$ zu setzen. Aus Gründen, die sogleich[2] evident werden, empfiehlt es sich,

$$\delta = 1 + \frac{\sigma(l)}{2\,(l+1)} \qquad (0 < \sigma(l) < 1)\,, \tag{7.2}$$

zu wählen, wobei dieses σ von dem σ in Ziff. 4 verschieden ist, und eine möglichst große obere Schranke für σ zu bestimmen. Wir erhalten nunmehr analog den bisherigen Überlegungen für F_1 aus (2.7) entsprechend (6.3)

$$\int_{\xi}^{\delta\xi} t^{2l+1}\,\mathfrak{Sin}\,r_1(t)\,dt < \frac{\xi^{2l+2}}{2l+2}\left[\left(1 + \frac{\sigma}{2\,(l+1)}\right)^{2(l+1)} - 1\right]\mathfrak{Sin}\,r_1\left(1 + \frac{\sigma}{2\,(l+1)}\right)\xi$$

$$< \frac{\xi^{2l+2}}{2l+2}\,(e^{\sigma} - 1)\,\mathfrak{Sin}\left[\frac{\beta\,\xi\,\sigma}{l+1}\left(1 + \frac{\sigma}{2\,(l+1)}\right)^2\right]. \tag{7.3}$$

Bei der Abschätzung von $F(\xi)$ nach unten benutzen wir (3.4) und zerlegen $f(q)$ in seine Summanden. Damit $F(\delta\,\xi) \geqq 0$ gilt, müssen wieder die zwei Ungleichungen

$$e^{\sigma} - 1 \leqq \left(\frac{9}{16}\right)^{l+1} - \left(\frac{1}{16}\right)^{l+1}, \tag{7.4a}$$

$$\frac{\sigma}{l+1}\left(1 + \frac{\sigma}{2\,(l+1)}\right)^2 \leqq \frac{15}{64} \tag{7.4b}$$

gleichzeitig erfüllt sein.

[1] Eine sehr ungenaue Abschätzung liefert (6.5) mit $\delta\,(\delta^2 - 1) < f_1\,(1/\sqrt{3})$ zu $\delta < 1{,}16$, während wohl $\delta \leqq 1{,}147$ vermutet werden kann.

[2] Siehe die Abschätzung in (7.3).

Wir betrachten zunächst (7.4a). Wegen

$$\left(\frac{9}{16}\right)^{l+1}-\left(\frac{1}{16}\right)^{l+1}=\left(\frac{9}{16}\right)^{l+1}\left(1-\frac{1}{9^{l+1}}\right)\geqq\frac{5}{9}\left(\frac{9}{16}\right)^{l}\qquad(\text{für } l\geqq 2)$$

ist (7.4a) sicher für

$$\sigma(l)=\log\left(1+\frac{5}{9}\left(\frac{9}{16}\right)^{l}\right)\qquad(l=2,\ldots)$$

erfüllt.
Da $\sigma(l)\leqq\sigma(2)$ für $l\geqq 2$ und $\sigma(2)<0{,}16$, ist aber auch (7.4b) für dieses $\sigma(l)$ sicher richtig und es ergibt sich in Verbindung mit Satz S_4 c) der S_5 *d*):
Ist $f(q)=C\,q^{2l+1}$ so gilt für $l\geqq 2$

$$\left(1+\frac{\sigma(l)}{2\,(l+1)}\xi\right)<q^{*}<\tau\,(l)\,\xi\,,$$

wobei $\sigma(l)=\log\left(1+\frac{5}{9}\left(\frac{9}{16}\right)^{2}\right)$ und $\tau(l)$ in Satz S_4 c) definiert ist.

Schließlich erhalten wir mit Satz S_3 und Satz S_5 d) den Satz S_6: Hat die Rückstellkraft die allgemeine Form

$$f(q)=\sum_{l=0}^{k}C_1\,q^{2l+1}\qquad(C_1\leqq 0)\,,$$

so gilt für die Grenzamplitude q^{*}

$$\left(1+\frac{\sigma^{*}}{2\,(k+1)}\right)\xi<q^{*}<1{,}5276\,\xi\qquad\text{mit}\qquad\sigma^{*}=\log\left[1+\frac{5}{9}\left(\frac{9}{16}\right)^{k}\right].$$

8. Zusammenfassung. Wird die nichtlineare Differentialgleichung (1.1) einer Klasse selbsterregter Schwingungen untersucht, so lassen sich untere und obere Schranken für die Grenzamplitude q^{*} angeben. Die Schranken können für eine große Zahl solcher Rückstellkräfte die in der Praxis der Schwingungslehre auftreten, allein mit Hilfe bekannter elementarer Funktionen, gewonnen werden.

Es gelingt, für die Rückstellkräfte der allgemeinen Form

$$f(q)=\sum_{l=0}^{k}C_1\,q^{2l+1}\qquad(C_1\geqq 0)$$

obere und untere Schranken für q^{*} zu bestimmen (siehe Satz S_1 und Satz S_6), während für

$$f(q)=C\,q\,,\qquad f(q)=C\,q^{3}\,,\qquad f(q)=C_0\,q+C_1\,q^{3}$$

sich diese Schranken noch verbessern lassen (siehe Satz S_3 und Satz S_5). Die bereits explizit bekannte untere Schranke $\xi=\sqrt{3}/|\alpha|$ kann dabei für diese speziellen Rückstellkräfte nicht ganz unwesentlich verbessert werden. Im Falle allgemeiner Rückstellkräfte ist dagegen die Verbesserung der unteren Schranke weniger erheblich. Sie kann jedoch für kleine $|\alpha|$ durchaus ins Gewicht fallen.

Die oberen Schranken errechnen sich für die betrachteten Rückstellkräfte in allen Fällen ohne die Benutzung transzendenter Gleichungen und lassen sich explizit angeben.

(Eingegangen am 10. Mai 1958.)

Anschrift des Verfassers: Privatdozent Dr. *H. Schubart*, Karlsruhe/Baden,
Mathematisches Institut der Technischen Hochschule.

Matrizen

Eine Darstellung für Ingenieure

Von Dr.-Ing. **Rudolf Zurmühl**

Zweite, völlig neubearbeitete und erweiterte Auflage

Mit 76 Abbildungen. XV, 467 Seiten Gr.-8°. 1958

Ganzleinen DM 33,—

Inhaltsübersicht: **Der Matrizenkalkül:** Grundbegriffe und einfache Rechenregeln. Das Matrizenprodukt. Die Kehrmatrix. Komplexe Matrizen. Lineare Abbildungen und Koordinatentransformationen. — **Lineare Gleichungen:** Der Gaußsche Algorithmus. Lineare Abhängigkeit und Rang. Allgemeine lineare Gleichungssysteme. Orthogonalsysteme. Polynommatrizen und ganzzahlige Matrizen. — **Quadratische Formen nebst Anwendungen:** Quadratische Formen. Einige Anwendungen des Matrizenkalküls. — **Das Eigenwertproblem:** Eigenwerte und Eigenvektoren. Diagonalähnliche Matrizen. Symmetrische Matrizen. Normale Matrizen. Die Matrix $\mathfrak{A}'\mathfrak{A}$. Abschätzungen. Eigenwerte spezieller Matrizen. — **Struktur der Matrix:** Minimumgleichung, Charakteristik und Klassifikation. Die Normalform. Hauptvektoren und Hauptvektorketten. Matrizenfunktionen und Matrizengleichungen. — **Numerische Verfahren:** Eigenwertaufgabe: Iterative Verfahren. Eigenwertaufgabe: Direkte Verfahren. Iterative Behandlung linearer Gleichungssysteme. — **Anwendungen:** Matrizen in der Elektrotechnik. Anwendungen in der Statik. Übertragungsmatrizen zur Behandlung elastomechanischer Aufgaben. Matrizen in der Schwingungstechnik. Systeme linearer Differentialgleichungen. — **Sachverzeichnis.**

Die Matrizenrechnung als jüngster Zweig der Ingenieurmathematik wird hier dem Ingenieur in einer ihm zugänglichen Darstellung und mit ausdrücklichem Bezug auf technische Anwendung nahegebracht. Matrizen sind die ebenso kurze wie sinnfällige Formelsprache linearer Beziehungen, sie sind Formelzeichen und Rechenvorschrift zugleich. Sie beherrschen Theorie und Praxis linearer Gleichungssysteme, und sie führen zu dem auch für zahlreiche Anwendungen so bedeutsamen Eigenwertproblem. Diese beiden Aufgaben, ihre Theorie und ihre numerische Behandlung, bilden den Hauptinhalt des Buches, wobei größter Wert auf eine enge Verbindung zwischen theoretischer Entwicklung und zahlenmäßiger Realisierung gelegt wird. Die Darstellung wird immer wieder durch Zahlenbeispiele, Abbildungen und Rechenschemata ergänzt und belebt. Insbesondere die breit behandelten numerischen Verfahren, bei denen auch die neuere Entwicklung gebührend berücksichtigt wird, sind durch ausführliche Beispiele erläutert. Anwendungen in Elektrotechnik, Baustatik, Elastomechanik, Schwingungslehre und auf Systeme linearer Differentialgleichungen beschließen das Buch und regen zu eigener praktischer Arbeit mit dem so nützlichen Hilfsmittel der Matrizen an.

SPRINGER - VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Kinematisch-getriebeanalytisches Praktikum

Hand-und Übungsbuch zur Analyse ebener Getriebe

Für den Konstrukteur, die Vorlesung und das Selbststudium

Von Dr. phil. habil. **Rudolf Beyer**

apl. Professor für Getriebelehre und Kinematik an der Technischen Hochschule München
Oberstudienrat D. des Oskar v. Miller-Polytechnikums, Akademie für angewandte Technik, München

Mit 162 Abbildungen. VII, 172 Seiten Gr.-8°. 1958
Ganzleinen DM 28,50

Aus einer soeben in „Engineering" erschienenen Besprechung:

„Es ist fraglich, ob es in England heute mehr als einen Mann gibt, der fähig ist, Professor Beyer's Buch über kinematische Getriebeanalyse hinlänglich zu rezensieren (zu beurteilen). Das zeugt von einer nahezu vollständigen Vernachlässigung dieses Lehrfaches auf den Universitäten — trotz der bedeutenden Arbeit, die Cambridger Mathematiker im vergangenen Jahrhundert auf diesem Gebiet leisteten. Heute kommen fast alle Originalabhandlungen von den deutschen und amerikanischen Schulen für Getriebelehre und Kinematik.

Wenige Bücher über Kinematik erläutern, wie die Lehre, die sie entwickeln, auf praktische Probleme angewendet werden kann. Dieses Buch, das Professor Beyer aus der Fülle seiner Erfahrungen heraus geschrieben hat, ist eine Ergänzung zu den vorhandenen musterhaften Lehrbüchern, zu denen auch seine eigenen früheren Werke gehören. In diesem neuen Buch werden zahlreiche praktische Probleme untersucht, die Theorie kurz zusammengefaßt und die Lösungen der Aufgaben demonstriert. Das Schrifttumsverzeichnis, in dem deutsche und amerikanische Abhandlungen aufgeführt sind, schließt Arbeiten ein, die erst im Frühjahr 1958 veröffentlicht wurden. Außer den durchgearbeiteten Beispielen ist dem Buch eine große Anzahl von Aufgaben — zum Teil mit Fingerzeigen — zur Lösung beigegeben."

Inhaltsübersicht: **Geschwindigkeits- und Krümmungsverhältnisse:** Ermittlung der Getriebestellung aus gegebener Ausgangsstellung. Ersatzgetriebe. Durchlaufen zweier infinitesimal benachbarter Getriebegliedlagen. Die Polkurven. Krümmungsverhältnisse der Punktbahnen. Getriebetechnische Anwendungen der Krümmungsverhältnisse von Punktbahnen. Hüllkurve und Hüllbahn. Geschwindigkeitsermittlung in ebenen Getrieben. — **Beschleunigungsverhältnisse in Getrieben:** Grundlagen. Beschleunigungszustand des komplan bewegten Getriebegliedes. Beschleunigungsermittlung in Kurbelgetrieben. Der Satz von CORIOLIS. Weitere Verfahren zur Beschleunigungsermittlung. Beschleunigungsermittlung bei zusammengesetzten Getrieben. Wiederholungsbeispiele. Kinematische Diagramme. Bewegungsgesetze für An- und Ablaufflanken von Kurvenscheibengetrieben. Keilschub- und Schraubgetriebe. — **Aufgaben:** Geschwindigkeitsverhältnisse. Krümmungs- und Beschleunigungsverhältnisse. Kurvengetriebe. Verschiedenes. — **Anhang:** Entwurfsunterlagen für Kurvengetriebe. Einige Grundlagen des Matrizenkalküls. — **Schrifttum. — Namenverzeichnis. — Sachverzeichnis.**

SPRINGER · VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Springer-Verlag · Berlin · Göttingen · Heidelberg. Printed in Germany. V/12/6 1.1 K.B./Z. 040.